

# Caderno do Futuro

A evolução do caderno


## MATEMÁTICA



3ª edição  
São Paulo – 2013



Coleção Caderno do Futuro  
Matemática  
© IBEP, 2013

 **Diretor superintendente** Jorge Yunes  
**Gerente editorial** Célia de Assis  
**Editor** Mizue Jyo  
**Assistente editorial** Edson Rodrigues

**Revisão** André Odashima  
Maria Inez de Souza

**Coordenadora de arte** Karina Monteiro  
**Assistente de arte** Marília Vilela

Nane Carvalho  
Carla Almeida Freire  
**Coordenadora de iconografia** Maria do Céu Pires Passuello  
**Assistente de iconografia** Adriana Neves

**Produção gráfica** José Antônio Ferraz  
**Assistente de produção gráfica** Eliane M. M. Ferreira

**Projeto gráfico** Departamento de Arte Ibeb

**Capa** Departamento de Arte Ibeb

**Editoração eletrônica** N-Publicações

**CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE**  
**SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ**

S58m  
3. ed

Silva, Jorge Daniel  
Matemática, 9º ano / Jorge Daniel da Silva, Valter dos Santos  
Fernandes, Orlando Donisete Mabelini. - 3. ed. - São Paulo : IBEP,  
2013.  
il. ; 28 cm (Caderno do futuro)

ISBN 978-85-342-3587-7 (aluno) - 978-85-342-3591-4 (professor)

I. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino.  
I. Fernandes, Valter dos Santos. II. Mabelini, Orlando Donisete.  
III. Título. IV. Série.

12-8694.

CDD: 372.72  
CDU: 373.3.016:510

27.11.12 03.12.12

041088

3ª edição – São Paulo – 2013  
Todos os direitos reservados.



Av. Alexandre Mackenzie, 619 – Jaguaré  
São Paulo – SP – 05322-000 – Brasil – Tel.: (11) 2799-7799  
www.editoraibep.com.br – editoras@ibep-nacional.com.br



# SUMÁRIO



## CAPÍTULO 1 – RADICAÇÃO

1. Raiz enésima de um número real.....4
2. Simplificação de radicais.....7
3. Como inserir um fator em um radical.....8
4. Como reduzir radicais ao mesmo índice .....9
5. Radicais semelhantes.....9



## CAPÍTULO 2 – OPERAÇÕES COM RADICAIS

1. Adição e subtração de radicais..... 11
2. Multiplicação e divisão de radicais ..... 13
3. Potenciação de radicais ..... 14
4. Radiciação de radicais ..... 14
5. Racionalização de denominadores..... 15
6. Extração da raiz quadrada..... 18



## CAPÍTULO 3 – EQUAÇÕES DO 2º GRAU

1. Equações do 2º grau incompletas .....20
2. Resolução de equações do 2º grau incompletas em R ..... 21
3. Resolução de equações do 2º grau completas em R.....24
4. Discussão quanto às raízes de uma equação do 2º grau .....31
5. Como determinar os coeficientes de uma equação do 2º grau .....32
6. Relações entre coeficientes e raízes de uma equação do 2º grau.....35
7. Formando uma equação do 2º grau a partir de suas raízes.....36
8. Raízes simétricas .....38



## CAPÍTULO 4 – EQUAÇÕES BIQUADRADAS E EQUAÇÕES IRRACIONAIS

1. Equações biquadradas .....39
2. Equações irracionais .....41



## CAPÍTULO 5 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES

- Solução de um sistema de equações.....44



## CAPÍTULO 6 – FUNÇÕES

1. Produto cartesiano.....47
2. Relação binária .....48
3. Função.....49
4. Valor numérico de uma função polinomial de R em R.....49
5. Função polinomial do 1º grau .....51
6. Função quadrática .....55



## CAPÍTULO 7 – INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

- Resoluções de inequações do 2º grau .....59



## CAPÍTULO 8 – SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

1. Razão entre segmentos .....62
2. Teorema de Tales .....63
3. Triângulos semelhantes .....66



## CAPÍTULO 9 – TRIÂNGULO RETÂNGULO

1. Relações métricas no triângulo retângulo...68
2. Aplicações do teorema de Pitágoras .....75
3. Relações trigonométricas no triângulo retângulo .....81



## CAPÍTULO 10 – RELAÇÕES MÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

1. Relações métricas.....87
2. Classificação de um triângulo quanto aos ângulos.....87



## CAPÍTULO 11 – CIRCUNFERÊNCIA E POLÍGONOS REGULARES

1. Relações métricas na circunferência .....88
2. Relações métricas nos polígonos regulares .....95
3. Áreas de figuras geométricas planas .....104

# CAPÍTULO 1 – RADICIAÇÃO

## 1. Raiz enésima de um número real

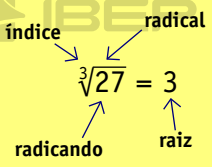


Sendo a e b números reais e n natural e diferente de zero, define-se:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$\sqrt[n]{a} = b$  Lê-se: raiz enésima de a é igual a b.

Exemplo:  $\sqrt[3]{27} = 3$ , pois  $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$



Se a = 0, então b = 0, pois  $0^n = 0$ .

Se a < 0, então  $\sqrt[n]{a}$  será real se n for um número ímpar.

### Exemplo:

O tabuleiro de xadrez é um quadrado dividido em 64 casas.



Para encontrar o número de casas de cada lado, basta calcular a raiz quadrada de 64. Portanto:  $\sqrt{64} = 8 \Leftrightarrow 8^2 = 64$ .

### 1. Observe o exemplo.

$$\sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow 4^2 = 16.$$

A raiz quadrada de 16 é igual a 4; o que equivale a 4 elevado ao quadrado ser igual a 16.

Escreva, por extenso, as seguintes equivalências:

a)  $\sqrt{49} = 7 \Leftrightarrow 7^2 = 49$

A raiz quadrada de 49 é igual a 7; o que equivale a 7 elevado ao quadrado ser igual a 49.

b)  $\sqrt[10]{1024} = 2 \Leftrightarrow 2^{10} = 1024$

A raiz décima de 1024 é igual a 2; o que equivale a 2 elevado à décima potência ser igual a 1024.

c)  $\sqrt[4]{81} = 3 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

A raiz quarta de 81 é igual a 3; o que equivale a 3 elevado à quarta potência ser igual a 81.

d)  $\sqrt[5]{-32} = -2 \Leftrightarrow (-2)^5 = -32$

A raiz quinta de -32 é igual a -2; o que equivale a -2 elevado à quinta potência ser igual a -32.

### 2. Dê o índice, o radical, o radicando e a

raiz em cada item, conforme o exemplo.

$$\sqrt[3]{27} = 3 \left\{ \begin{array}{l} \text{índice: } 3 \\ \text{radical: } \sqrt[3]{\phantom{27}} \\ \text{radicando: } 27 \\ \text{raiz: } 3 \end{array} \right.$$

a)  $\sqrt{49} = 7 \left\{ \begin{array}{l} \text{índice: } 2 \\ \text{radical: } \sqrt{\phantom{49}} \\ \text{radicando: } 49 \\ \text{raiz: } 7 \end{array} \right.$

$$b) \sqrt[4]{16} = 2 \begin{cases} \text{índice: } 4 \\ \text{radical: } \sqrt[4]{16} \\ \text{radicando: } 16 \\ \text{raiz: } 2 \end{cases}$$

$$c) \sqrt{25} = 5 \begin{cases} \text{índice: } 2 \\ \text{radical: } \sqrt{25} \\ \text{radicando: } 25 \\ \text{raiz: } 5 \end{cases}$$

**3.** Complete as equivalências.

$$a) \sqrt[3]{64} = 4 \leftrightarrow 4^3 = 64$$

$$b) \sqrt{25} = 5 \leftrightarrow 5^2 = 25$$

$$c) \sqrt{16} = 4 \leftrightarrow 4^2 = 16$$

$$d) \sqrt[3]{-27} = -3 \leftrightarrow (-3)^3 = -27$$

$$e) \sqrt{1} = 1 \leftrightarrow 1^2 = 1$$

$$f) \sqrt{0} = 0 \leftrightarrow 0^2 = 0$$

$$g) \sqrt{81} = 9 \leftrightarrow 9^2 = 81$$

$$h) \sqrt{36} = 6 \leftrightarrow 6^2 = 36$$

**4.** Complete as sentenças com os símbolos

$\in$  (pertence) ou  $\notin$  (não pertence).

$$a) \sqrt{16} \in \mathbb{R}$$

$$b) \sqrt{9} \in \mathbb{R}$$

$$c) \sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$$

$$d) \sqrt[3]{-1} \in \mathbb{R}$$

$$e) \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$$

$$f) \sqrt{-36} \notin \mathbb{R}$$

$$g) \sqrt[4]{-16} \notin \mathbb{R}$$

$$h) \sqrt[3]{-27} \in \mathbb{R}$$

$$i) \sqrt[5]{-243} \in \mathbb{R}$$

$$j) \sqrt[4]{-10000} \notin \mathbb{R}$$

A raiz enésima de um número real positivo a elevado à potência n é igual ao próprio número a.

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

**5.** Complete as sentenças.

$$a) \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$b) \sqrt{5^2} = 5$$

$$c) \sqrt{a^2} = a$$

$$d) \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$e) \sqrt[3]{7^3} = 7$$

$$f) \sqrt[6]{17^6} = 17$$

$$g) \sqrt{1^2} = 1$$

$$h) \sqrt{5^2} = 5$$

$$i) \sqrt[8]{(5a)^8} = 5a$$

$$j) \sqrt[8]{2^8} = 2$$

$$k) \sqrt[p]{a^p} = a$$

$$l) \sqrt{b^2} = b$$



Multiplicando ou dividindo o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número positivo e diferente de zero, o radical não se altera.

**6.** De acordo com o exemplo, divida o índice e o expoente pelo mdc (máximo divisor comum) entre eles para estes radicais.

$$\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[6:2]{a^{4:2}} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$a) \sqrt[6]{a^9} =$$

$$\sqrt[6:3]{a^{9:3}} = \sqrt[2]{a^3} = \sqrt{a^3}$$

$$b) \sqrt[15]{a^5} =$$

$$\sqrt[15:5]{a^{5:5}} = \sqrt[3]{a}$$

$$c) \sqrt[14]{3^7} =$$

$$\sqrt[14:7]{3^{7:7}} = \sqrt[2]{3} = \sqrt{3}$$

$$d) \sqrt{8^6} =$$

$$\sqrt[2:2]{8^{6:2}} = \sqrt[1]{8^3} = 8^3$$

$$e) \sqrt{5^{18}} =$$

$$\sqrt[2:2]{5^{18:2}} = \sqrt[1]{5^9} = 5^9$$

## Raiz enésima de um produto



A raiz enésima do produto de dois ou mais números reais positivos é igual ao produto das raízes enésimas desses fatores.

$$\text{Exemplo: } \sqrt[n]{ax} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{x}$$

**7.** Observe o exemplo e complete.

$$\sqrt[5]{2 \cdot a} = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{a}$$

$$a) \sqrt[3]{2 \cdot 5 \cdot 7} =$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$$

$$b) \sqrt{a \cdot b \cdot c} =$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$$

$$c) \sqrt{10 \cdot a} =$$

$$\sqrt{10} \cdot \sqrt{a}$$

$$d) \sqrt[3]{8ab} =$$

$$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

$$e) \sqrt[5]{3 \cdot 9 \cdot 2} =$$

$$\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{2}$$

$$f) \sqrt{5a^3b^5} =$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b^5}$$

$$g) \sqrt{8a^7b^5} =$$

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{a^7} \cdot \sqrt{b^5}$$

## Raiz enésima de um quociente



A raiz enésima de um quociente corresponde ao quociente das raízes enésimas do dividendo e do divisor.

Exemplo:  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ , com  $b \neq 0$

8. Observe o exemplo e complete.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

a)  $\sqrt[3]{\frac{7}{5}} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{5}}$

b)  $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

c)  $\sqrt[5]{\frac{3^2}{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{2^3}}$

d)  $\sqrt[8]{\frac{2^4}{3^5}} = \frac{\sqrt[8]{2^4}}{\sqrt[8]{3^5}}$

e)  $\sqrt{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{3^3}}$

f)  $\sqrt[5]{\frac{2^4}{5^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{5^2}}$

g)  $\sqrt[7]{\frac{2^3}{4^3}} = \frac{\sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[7]{4^3}}$

## 2. Simplificação de radicais

Exemplos:

•  $\sqrt[10]{3^4} = \sqrt[10 \div 2]{3^{4 \div 2}} = \sqrt[5]{3^2}$

•  $\sqrt[6]{5^{12}} = \sqrt[6 \div 6]{5^{12 \div 6}} = 5^2$

•  $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

•  $\sqrt[4]{a^4 b} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{b} = a \sqrt[4]{b}$

•  $\sqrt{25a^6 b^8 c} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{b^8} \cdot \sqrt{c} = 5a^3 b^4 \sqrt{c}$

•  $\sqrt{\frac{a}{b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{a}}{b}$

9. Simplifique os radicais.

a)  $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[8 \div 2]{3^{6 \div 2}} = \sqrt[4]{3^3}$

b)  $\sqrt[15]{a^{10}} = \sqrt[15 \div 5]{a^{10 \div 5}} = \sqrt[3]{a^2}$

c)  $\sqrt[4]{b^8} = \sqrt[4 \div 4]{b^{8 \div 4}} = \sqrt[1]{b^2} = b^2$

d)  $\sqrt{16} = \sqrt[2]{2^4} = \sqrt[2 \div 2]{2^{4 \div 2}} = \sqrt[1]{2^2} = 2^2$

e)  $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3 \div 3]{2^{6 \div 3}} = \sqrt[1]{2^2} = 2^2$

f)  $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3 \div 3]{3^{3 \div 3}} = \sqrt[1]{3} = 3$

g)  $\sqrt{25x^2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^2} = \sqrt{5^2} \cdot x = 5 \cdot x$

h)  $\sqrt[3]{8a^6} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{a^6} = \sqrt[3]{2^3} \cdot a^2 = 2a^2$

$$i) \sqrt{64x^4y^8} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{x^4} \sqrt{y^8} = \sqrt{2^6} \cdot x^2 \cdot y^4 = 2^3x^2y^4$$

$$j) \sqrt[4]{16x^8} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{x^8} = \sqrt[4]{2^4} \cdot x^2 = 2x^2$$

$$k) \sqrt{25a^2b^4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^4} = \sqrt{5^2} \cdot a \cdot b^2 = 5ab^2$$

$$l) \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} \cdot \sqrt{2^2} \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$m) \sqrt{75} = \sqrt{3 \cdot 5^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5^2} = \sqrt{3} \cdot 5 = 5\sqrt{3}$$

$$n) \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = \sqrt{2} \cdot 3 = 3\sqrt{2}$$

$$o) \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} = \sqrt{2} \cdot 5 = 5\sqrt{2}$$

$$p) \sqrt{12x} = \sqrt{12} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{2^2 \cdot 3} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{3} \sqrt{x}$$

$$q) \sqrt{48a} = \sqrt{48} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{2^4 \cdot 3} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{a} = 2^2\sqrt{3} \sqrt{a} = 4\sqrt{3} \sqrt{a}$$

$$r) \sqrt{\frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{3^2}}{x} = \frac{3}{x}$$

$$s) \sqrt{\frac{25a^6}{x^{10}}} = \frac{\sqrt{25 \cdot a^6}}{\sqrt{x^{10}}} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{a^6}}{x^5} = \frac{\sqrt{5^2} \cdot a^3}{x^5} = \frac{5a^3}{x^5}$$

$$t) \sqrt{\frac{49a^2}{16}} = \frac{\sqrt{49 \cdot a^2}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{49} \cdot \sqrt{a^2}}{\sqrt{2^4}} = \frac{\sqrt{7^2} \cdot a}{2^2} = \frac{7a}{4}$$

**10.** Analise as sentenças e escreva nos parênteses V para verdadeiro ou F para falso.

$$a) \sqrt[3]{a^4} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a} = a\sqrt[3]{a}$$

V

$$b) \sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2}$$

F

$$c) \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

V

$$d) \sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a} = a \cdot a\sqrt[3]{a}$$

F

$$e) \sqrt[5]{x^9} = \sqrt[5]{x^5} \cdot \sqrt[5]{x^4} = x\sqrt[5]{x^4}$$

V

$$f) \sqrt{1000} = \sqrt{10^3} = \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{10} = 10\sqrt{10}$$

V

### 3. Como inserir um fator em um radical

Exemplos:

$$a) a^7 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^{7 \cdot 3} \cdot b} = \sqrt[3]{a^{21}b}$$

$$b) x \cdot \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{x^5y}$$

$$c) 3a \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot a^2 \cdot 5} = \sqrt{9 \cdot a^2 \cdot 5} = \sqrt{45a^2}$$

**11.** Desenvolva as multiplicações, colocando os fatores nos radicais.

$$a) x^3 \cdot \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{x^{15} \cdot y}$$

$$b) a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 \cdot b}$$

$$c) m \cdot \sqrt{a} = \sqrt{m^2 \cdot a}$$

$$d) 3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$



$$e) 2\sqrt{5} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$$

$$f) 3a\sqrt{7} = \sqrt{3^2 \cdot a^2 \cdot 7} = \sqrt{9 \cdot a^2 \cdot 7} = \sqrt{63 \cdot a^2}$$

$$g) 2x \cdot \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2^5 \cdot x^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{32 \cdot x^5 \cdot 2} = \sqrt[5]{64 \cdot x^5}$$

$$h) 8\sqrt{3} = \sqrt{8^2 \cdot 3} = \sqrt{64 \cdot 3} = \sqrt{192}$$

$$i) 4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}$$

$$j) 2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$$

$$k) x \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x} = \sqrt[4]{x^5}$$

$$l) y \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{y^3 \cdot y} = \sqrt[3]{y^4}$$

$$m) a\sqrt{a} = \sqrt{a^2 \cdot a} = \sqrt{a^3}$$

$$n) ab\sqrt{ab} = \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot a \cdot b} = \sqrt{a^3 \cdot b^3}$$

## 4. Como reduzir radicais ao mesmo índice



Vamos escrever os seguintes radicais com o mesmo índice.

$$\sqrt[3]{2^2} ; \sqrt[4]{5^3} ; \sqrt{7}$$

Sendo mmc  $(3, 4, 2) = 12$ , fazemos:

$$\begin{array}{l} \sqrt[3]{2^2} ; \sqrt[4]{5^3} ; \sqrt{7} \\ + \quad \quad \quad \times \\ \hline \sqrt[12]{2^8} ; \sqrt[12]{5^9} ; \sqrt[12]{7^6} \end{array}$$

## 12. Reduza os radicais ao mesmo índice.

$$a) \sqrt[3]{2} ; \sqrt{5}$$

$$\sqrt[6]{2^2} ; \sqrt[6]{5^3}$$

$$b) \sqrt{a} ; \sqrt[3]{a^2} ; \sqrt[4]{3}$$

$$\sqrt[12]{a^6} ; \sqrt[12]{a^8} ; \sqrt[12]{3^3}$$

$$c) \sqrt[8]{a^3} ; \sqrt[12]{b^5}$$

$$\sqrt[24]{a^9} ; \sqrt[24]{b^{10}}$$

$$d) \sqrt[3]{5^2} ; \sqrt[6]{7^5}$$

$$\sqrt[12]{5^8} ; \sqrt[12]{7^{10}}$$

$$e) \sqrt{x} ; \sqrt[3]{x^2} ; \sqrt[4]{3}$$

$$\sqrt[12]{x^6} ; \sqrt[12]{x^8} ; \sqrt[12]{3^3}$$

$$f) \sqrt[6]{2^5} ; \sqrt{3} ; \sqrt[3]{5^2}$$

$$\sqrt[6]{2^5} ; \sqrt[6]{3^3} ; \sqrt[6]{5^4}$$

$$g) \sqrt{a} ; \sqrt[3]{a} ; \sqrt[4]{a}$$

$$\sqrt[12]{a^6} ; \sqrt[12]{a^4} ; \sqrt[12]{a^3}$$

$$h) \sqrt[5]{7^3} ; \sqrt[10]{3^5} ; \sqrt{5^2} ; \sqrt[4]{3}$$

$$\sqrt[20]{7^{12}} ; \sqrt[20]{3^{10}} ; \sqrt[20]{5^{20}} ; \sqrt[20]{3^5}$$

## 5. Radicais semelhantes



Dois ou mais radicais são semelhantes quando têm o mesmo índice e o mesmo radicando.

**13.** Escreva nos parênteses S para radicais semelhantes ou N para radicais não-selhantes.

$$a) 8\sqrt{2} ; \sqrt{2} ; 3\sqrt{2}$$

S

$$b) \sqrt{5} ; \sqrt[4]{5} ; \sqrt[5]{3}$$

N

$$c) \sqrt[3]{2} ; 3\sqrt[3]{2} ; 8\sqrt[3]{2}$$

S

$$d) a\sqrt{b} ; 5\sqrt{b} ; -\sqrt{b}$$

S

$$e) 5\sqrt[4]{7} ; 5\sqrt{7} ; 5\sqrt[3]{7}$$

N

$$f) \sqrt{a} ; \sqrt{b} ; \sqrt{c}$$

N

g)  $\sqrt[3]{5} ; \sqrt[3]{2}$

N

h)  $\sqrt{3} ; 8\sqrt{3} ; -\sqrt{3}$

S

i)  $7\sqrt{2} ; 9\sqrt{2} ; \sqrt{2}$

S

j)  $8\sqrt[3]{5} ; 8\sqrt{5}$

N

k)  $\sqrt{a} ; \sqrt[3]{a}$

N

l)  $5\sqrt{3} ; 5\sqrt[3]{3}$

N

m)  $10\sqrt{2} ; 17\sqrt{2}$

S

n)  $\sqrt{7} ; 7\sqrt{7} ; 8\sqrt{7}$

S

**14.** Simplifique os radicais.

a)  $\sqrt{x^8} = x^4$

b)  $\sqrt{a^6 b^{10}} = a^3 \cdot b^5$

c)  $\sqrt{8x^8} = 2x^4 \cdot \sqrt{2}$

d)  $\sqrt{81x^6 y^{10}} = 9 \cdot x^3 \cdot y^5$

e)  $\sqrt{\frac{x^2}{100}} = \frac{x}{10}$

f)  $\sqrt{x^9} = x^4 \cdot \sqrt{x}$

g)  $\sqrt{4x^3} = 2x\sqrt{x}$

h)  $\sqrt[3]{8x^6} = 2 \cdot x^2$

**15.** Desenvolva as multiplicações, colocando os fatores dentro dos radicais.

a)  $3\sqrt{18} = \sqrt{18 \cdot 3^2} = \sqrt{162}$

b)  $ab\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5a^3 b^3}$

c)  $5a\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 5^3 \cdot a^3} = \sqrt[3]{250a^3}$

d)  $10\sqrt{10} = \sqrt{10 \cdot 10^2} = \sqrt{1000}$

e)  $x^7\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot (x^7)^2} = \sqrt{3x^{14}}$

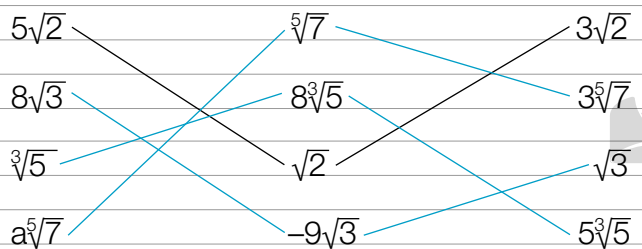
f)  $x\sqrt{x} = \sqrt{x \cdot x^2} = \sqrt{x^3}$

g)  $mx^7\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a \cdot m^3 \cdot (x^7)^3} = \sqrt[3]{am^3 x^{21}}$

h)  $2a\sqrt{4a} = \sqrt{4a \cdot (2a)^2} = \sqrt{16a^3}$

**16.** Ligue os radicais semelhantes

conforme o exemplo.



**17.** Reduza os radicais ao mesmo índice.

a)  $\sqrt{3} ; \sqrt[3]{5} ; \sqrt[4]{2}$   
 $\frac{12}{12}\sqrt{3^6} ; \frac{12}{12}\sqrt[3]{5^4} ; \frac{12}{12}\sqrt[4]{2^3}$

b)  $\sqrt[5]{2} ; \sqrt{7} ; \sqrt[4]{3}$   
 $\frac{20}{20}\sqrt[5]{2^4} ; \frac{20}{20}\sqrt{7^{10}} ; \frac{20}{20}\sqrt[4]{3^5}$

c)  $\sqrt{a} ; \sqrt[7]{a^3}$   
 $\frac{14}{14}\sqrt{a^7} ; \frac{14}{14}\sqrt[7]{a^6}$

d)  $\sqrt[3]{2} ; \sqrt[10]{a^7} ; \sqrt[5]{3}$   
 $\frac{30}{30}\sqrt[3]{2^{10}} ; \frac{30}{30}\sqrt[10]{a^{21}} ; \frac{30}{30}\sqrt[5]{3^6}$



## CAPÍTULO 2 – OPERAÇÕES COM RADICAIS

### 1. Adição e subtração de radicais



#### Com radicais semelhantes

Na adição e subtração de radicais semelhantes operamos os coeficientes e conservamos os radicais. Exemplo:

$$5\sqrt{x} + \sqrt{x} + 3\sqrt{x} = (5 + 1 + 3) \cdot \sqrt{x} = 9\sqrt{x}$$

#### 1. Resolva as operações.

a)  $7\sqrt{7} + 8\sqrt{7} = (7 + 8)\sqrt{7} = 15\sqrt{7}$

b)  $10\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (10 + 5)\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$

c)  $10\sqrt{5} - 7\sqrt{5} = (10 - 7)\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

d)  $7\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = (7 - 12)\sqrt{2} = -5\sqrt{2}$

e)  $8\sqrt{5} - \sqrt{5} = (8 - 1)\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

f)  $3\sqrt{a} - 4\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = (3 - 4 + 3)\sqrt{a} = 2\sqrt{a}$

g)  $10\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = (10 - 1 + 2)\sqrt[3]{5} = 11\sqrt[3]{5}$

h)  $\sqrt{3} - 10\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = (1 - 10 - 8)\sqrt{3} = -17\sqrt{3}$

i)  $-\sqrt{7} - 12\sqrt{7} = (-1 - 12)\sqrt{7} = -13\sqrt{7}$

j)  $8\sqrt{a} - 9\sqrt{a} + 10\sqrt{a} = (8 - 9 + 10)\sqrt{a} = 9\sqrt{a}$

k)  $\sqrt{a} - \sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 3\sqrt{a} = (1 - 1 - 3 + 3)\sqrt{a} = 0$

l)  $8\sqrt[3]{2} + 9\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} = (8 + 9 - 10)\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$



#### Com radicais não semelhantes

Quando os radicais não são semelhantes, devemos simplificá-los e reduzi-los a termos semelhantes e indicar a soma dos não semelhantes.

Exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + 5\sqrt{27} &= \\ &= \sqrt{2^2 \cdot 3} + 5\sqrt{3^2 \cdot 3} = \\ &= 2\sqrt{3} + 5 \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 17\sqrt{3}\end{aligned}$$

#### 2. Simplifique e reduza os termos

semelhantes conforme o exemplo.

$$\begin{aligned}\sqrt{12} + \sqrt{48} &= \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^4 \cdot 3} = \\ &= 2\sqrt{3} + 2^2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\end{aligned}$$

a)  $\sqrt{8} + \sqrt{18} =$   
 $= \sqrt{2^3} + \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} =$   
 $= 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sqrt{27} + \sqrt{75} + 5\sqrt{3} &= \\
 &= \sqrt{3^3} + \sqrt{5^2 \cdot 3} + 5 \cdot \sqrt{3} = \\
 &= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} + 5 \cdot \sqrt{3} = \\
 &= 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 13\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h) } 3a\sqrt{2} + \sqrt{18a^2} &= \\
 &= 3a \cdot \sqrt{2} + \sqrt{18} \cdot \sqrt{a^2} = \\
 &= 3a \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3^2 \cdot 2} \cdot a = 3a \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3^2} \cdot a \cdot \sqrt{2} = \\
 &= 3a\sqrt{2} + 3a\sqrt{2} = 6a\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \sqrt{125} + 2\sqrt{5} &= \\
 &= \sqrt{5^3} + 2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{5} = \\
 &= 5\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 7\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i) } \sqrt{32} + \sqrt{8} + \sqrt{128} &= \\
 &= \sqrt{2^5} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^7} = \\
 &= \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2^6} \cdot \sqrt{2} = \\
 &= 2^2 \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2^3 \cdot \sqrt{2} = \\
 &= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 14\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \sqrt{25x} + \sqrt{16x} + \sqrt{49x} &= \\
 &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{49} \cdot \sqrt{x} = \\
 &= \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{x} = \\
 &= 5\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + 7\sqrt{x} = 16\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{j) } 5\sqrt{2} + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{3} &= \\
 &= 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = \\
 &= \sqrt{2} + 14\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \sqrt{4a} + 9\sqrt{a} - \sqrt{64a} - \sqrt{9a} &= \\
 &= \sqrt{4} \cdot \sqrt{a} + 9 \cdot \sqrt{a} - \sqrt{64} \cdot \sqrt{a} - \sqrt{9} \cdot \sqrt{a} = \\
 &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{a} + 9 \cdot \sqrt{a} - \sqrt{8^2} \cdot \sqrt{a} - \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{a} = \\
 &= 2\sqrt{a} + 9\sqrt{a} - 8\sqrt{a} - 3\sqrt{a} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{k) } \sqrt{12} + 9\sqrt{3} - \sqrt{8} + \sqrt{32} &= \\
 &= \sqrt{2^2 \cdot 3} + 9 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2^3} + \sqrt{2^5} = \\
 &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} + 9 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} = \\
 &= 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 2^2 \cdot \sqrt{2} = \\
 &= 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = \\
 &= 11\sqrt{3} + 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \sqrt{2} + 10\sqrt{50} &= \\
 &= \sqrt{2} + 10 \cdot \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{2} + 10 \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} = \\
 &= \sqrt{2} + 10 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} = \\
 &= \sqrt{2} + 50\sqrt{2} = 51\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l) } \sqrt{25} + \sqrt{4a} + \sqrt{64} + \sqrt{a} &= \\
 &= \sqrt{5^2} + \sqrt{2^2 \cdot a} + \sqrt{8^2} + \sqrt{a} = 5 + \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{a} + 8 + \sqrt{a} = \\
 &= 5 + 8 + 2 \cdot \sqrt{a} + \sqrt{a} = 13 + 3\sqrt{a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g) } \sqrt{3} + 8\sqrt{12} - 7\sqrt{27} &= \\
 &= \sqrt{3} + 8 \cdot \sqrt{2^2 \cdot 3} - 7 \cdot \sqrt{3^3} = \\
 &= \sqrt{3} + 8 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} - 7 \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = \\
 &= \sqrt{3} + 8 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} - 7 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \\
 &= \sqrt{3} + 16\sqrt{3} - 21\sqrt{3} = -4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{m) } \sqrt{49m} - \sqrt{100n} + \sqrt{16m} - \sqrt{64n} &= \\
 &= \sqrt{7^2 \cdot m} - \sqrt{10^2 \cdot n} + \sqrt{4^2 \cdot m} - \sqrt{8^2 \cdot n} = \\
 &= \sqrt{7^2} \cdot \sqrt{m} - \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{n} + \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{m} - \sqrt{8^2} \cdot \sqrt{n} = \\
 &= 7 \cdot \sqrt{m} + 4 \cdot \sqrt{m} - 10 \cdot \sqrt{n} - 8\sqrt{n} = \\
 &= 11\sqrt{m} - 18\sqrt{n}
 \end{aligned}$$

## 2. Multiplicação e divisão de radicais



### Com radicais de mesmo índice

Conservamos o índice comum e multiplicamos ou dividimos os radicandos.

### 3. Efetue as operações.

a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$

b)  $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10}$

c)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{30}$

d)  $3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = 15\sqrt{6}$

e)  $\sqrt{30} \div \sqrt{6} = \sqrt{5}$

f)  $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{b^3} = \sqrt[5]{a^3b^3}$

g)  $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{10}$

h)  $6\sqrt[3]{10} \div 3\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{2}$

i)  $3a\sqrt{2} \cdot \sqrt{18a^2} = 3a\sqrt{36a^2} = 3a \cdot 6a = 18a^2$

j)  $\sqrt[3]{10} \div \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2}$



### Com radicais de índices diferentes

Neste caso é necessário reduzi-los ao mesmo índice para depois se efetuar a multiplicação ou a divisão.

Exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{3} &= \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 3^3} = \\ &= \sqrt[12]{16 \cdot 27} = \sqrt[12]{432}\end{aligned}$$

### 4. Efetue as operações.

a)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 9} = \sqrt[6]{72}$

b)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[14]{a^7} \cdot \sqrt[14]{a^6} = \sqrt[14]{a^7 \cdot a^6} = \sqrt[14]{a^{13}}$

c)  $\sqrt[5]{b^3} \cdot \sqrt[10]{b} = \sqrt[10]{b^6} \cdot \sqrt[10]{b} = \sqrt[10]{b^6 \cdot b} = \sqrt[10]{b^7}$

d)  $10\sqrt[4]{2} \cdot 6\sqrt{2} = 60 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2} = 60 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^2} =$   
 $= 60 \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 2^2} = 60 \cdot \sqrt[4]{2^3} = 60\sqrt[4]{8}$

e)  $3\sqrt{a} \cdot 5\sqrt[3]{a} = 15 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} = 15 \cdot \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^2} =$   
 $= 15 \cdot \sqrt[6]{a^3 \cdot a^2} = 15 \cdot \sqrt[6]{a^5}$

f)  $\sqrt{5} \div \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^2} \div \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5^2 \div 5} = \sqrt[4]{5}$

g)  $8\sqrt[3]{a^7} \div 2\sqrt{a} = 4 \cdot \sqrt[3]{a^7} \div \sqrt{a} = 4 \cdot \sqrt[6]{a^{14}} \div \sqrt[6]{a^3} =$   
 $= 4 \cdot \sqrt[6]{a^{14} \div a^3} = 4 \cdot \sqrt[6]{a^{11}} = 4 \cdot \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{a^5} = 4a\sqrt[6]{a^5}$

h)  $7\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^7} \cdot 5\sqrt{a} = 35 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^7} \cdot \sqrt{a} =$   
 $= 35 \cdot \sqrt[10]{a^5} \cdot a^{14} \cdot a^5 = 35 \cdot \sqrt[10]{a^{24}} = 35 \cdot \sqrt[10]{a^{20}} \cdot \sqrt[10]{a^4} =$   
 $= 35 \cdot a^2 \cdot \sqrt[5]{a^2} = 35a^2\sqrt[5]{a^2}$

$$i) \sqrt{m} \cdot \sqrt[5]{m} \cdot \sqrt[3]{m} = \sqrt[30]{m^{15}} \cdot \sqrt[30]{m^6} \cdot \sqrt[30]{m^{10}} = \sqrt[30]{m^{15 \cdot m^6 \cdot m^{10}}} = \sqrt[30]{m^{31}} = \sqrt[30]{m^{30}} \cdot \sqrt[30]{m} = m \sqrt[30]{m}$$

$$j) \sqrt{a} \div \sqrt[7]{a} = \sqrt[14]{a^7} \div \sqrt[14]{a^2} = \sqrt[14]{a^7 \div a^2} = \sqrt[14]{a^5}$$

$$k) 10 \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[7]{a^4} = 10 \cdot \sqrt[21]{a^{14}} \div \sqrt[21]{a^{12}} = 10 \cdot \sqrt[21]{a^{14} \div a^{12}} = 10 \sqrt[21]{a^2}$$

$$l) 6\sqrt{a} \div 2\sqrt[3]{a} = 3 \cdot \sqrt{a} \div \sqrt[3]{a} = 3 \cdot \sqrt[6]{a^3} \div \sqrt[6]{a^2} = 3 \cdot \sqrt[6]{a^3 \div a^2} = 3\sqrt[6]{a}$$

### 3. Potenciação de radicais



Para elevar um radical a uma potência basta elevar o radicando a essa potência.

Exemplo:  $(\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$

**5.** Efetue e simplifique quando possível.

a)  $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

b)  $(\sqrt[7]{a})^5 = \sqrt[7]{a^5}$

c)  $(\sqrt[5]{2^2})^2 = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$

d)  $(\sqrt{a})^3 = \sqrt{a^3} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$

e)  $(\sqrt{a})^5 = \sqrt{a^5} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{a} = a^2\sqrt{a}$

f)  $(\sqrt{m})^{10} = \sqrt{m^{10}} = m^5$

g)  $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$

h)  $(\sqrt{3a})^2 = \sqrt{(3a)^2} = \sqrt{9a^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{3^2} \cdot a = 3a$

i)  $(\sqrt[3]{5b})^3 = \sqrt[3]{(5b)^3} = 5b$

j)  $(\sqrt{m^3})^8 = \sqrt{(m^3)^8} = \sqrt{m^{24}} = m^{12}$

k)  $(\sqrt{2^6})^3 = \sqrt{(2^6)^3} = \sqrt{2^{18}} = 2^9$

l)  $(\sqrt{x})^7 = \sqrt{x^7} = \sqrt{x^6} \cdot \sqrt{x} = x^3\sqrt{x}$

### 4. Radiciação de radicais



Para determinar a raiz de um radical, basta conservar o radicando e multiplicar os índices dos radicais entre si.

Exemplo:  $= \sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3 \times 2]{a} = \sqrt[6]{a}$

**6.** Efetue e simplifique quando possível.

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$

b)  $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{5}}} = \sqrt[12]{5}$

c)  $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$

d)  $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[15]{a}$

e)  $\sqrt{\sqrt{a^6}} = \sqrt[4]{a^6} = \sqrt[2]{a^3} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a\sqrt{a}$

f)  $\sqrt[5]{\sqrt{3^2}} = \sqrt[10]{3^2} = \sqrt[5]{3}$

g)  $(\sqrt{4x^3})^2 = \sqrt{(4x^3)^2} = 4x^3$

$$h) (5\sqrt{2})^2 = 5^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$$

$$i) (3a\sqrt{5})^2 = (3a)^2 \cdot (\sqrt{5})^2 = 9a^2 \cdot 5 = 45a^2$$

## 5. Racionalização de denominadores



Racionaliza-se o denominador de uma fração multiplicando seu numerador e seu denominador pelo fator racionalizante. Esse processo converte uma fração com denominador irracional em uma fração equivalente de denominador racional.

Exemplo:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \times \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{(\sqrt[3]{5})^2} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$$

7. Racionalize:

$$a) \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$c) \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$d) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$e) \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$f) \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$g) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 7}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$$h) \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$$

$$i) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$j) \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$k) \frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{8}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$l) \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 7}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

$$m) \frac{\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2}}{5 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{10}$$

$$n) \frac{8}{3\sqrt{7}} = \frac{8}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{8 \cdot \sqrt{7}}{3 \cdot 7} = \frac{8\sqrt{7}}{21}$$

**8.** Associe a coluna da esquerda com a da direita escrevendo dentro dos parênteses a letra correspondente.

$$a) \frac{5}{\sqrt{2}} \quad \boxed{f} \quad \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

$$b) \frac{3}{\sqrt{3}} \quad \boxed{a} \quad \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \frac{7}{\sqrt{2}} \quad \boxed{d} \quad \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$d) \frac{a}{\sqrt{b}} \quad \boxed{e} \quad \frac{3\sqrt{a}}{a}$$

$$e) \frac{3}{\sqrt{a}} \quad \boxed{c} \quad \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$f) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \boxed{b} \quad \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

## Fator racionalizante



Em  $\frac{3}{\sqrt[3]{a^2}}$ , o fator racionalizante é  $\sqrt[3]{a^3}$ , pois:

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^5} = a$$

$$\frac{3 \cdot \sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^3}} = \frac{3\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{a^5}} = \frac{3\sqrt[3]{a^3}}{a}$$

Observe:

De modo geral, o fator racionalizante de  $\frac{n}{\sqrt[n]{a^p}}$  é  $\sqrt[n]{a^{n-p}}$ .

**9.** Racionalize.

$$a) \frac{2}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{\sqrt[3]{a}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

$$b) \frac{5}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{5}{\sqrt[4]{a^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{a^4}}{\sqrt[4]{a^4}} = \frac{5\sqrt[4]{a^4}}{a}$$

$$c) \frac{8}{\sqrt[5]{a}} = \frac{8}{\sqrt[5]{a}} \cdot \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^4}} = \frac{8\sqrt[5]{a^4}}{a}$$

$$d) \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{2^2}}{2} = \frac{3\sqrt[5]{4}}{2}$$

$$e) \frac{7}{\sqrt[8]{a}} = \frac{7}{\sqrt[8]{a}} \cdot \frac{\sqrt[8]{a^7}}{\sqrt[8]{a^7}} = \frac{7\sqrt[8]{a^7}}{a}$$

$$f) \frac{2}{\sqrt[10]{3}} = \frac{2}{\sqrt[10]{3}} \cdot \frac{\sqrt[10]{3^9}}{\sqrt[10]{3^9}} = \frac{2\sqrt[10]{3^9}}{3}$$



$$g) \frac{5}{\sqrt[4]{b}} = \frac{5}{\sqrt[4]{b}} \cdot \frac{\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt[4]{b^3}} = \frac{5\sqrt[4]{b^3}}{b}$$

$$h) \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{3 \cdot \sqrt{8}}{8} = \frac{3 \cdot \sqrt{2^3}}{8} =$$

$$= \frac{3 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2}}{8} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$i) \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$j) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exemplos:

a)  $\frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$  → o fator racionalizante é

$\sqrt{7} - \sqrt{3}$ , pois:

$$(\sqrt{7} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = 7 - 3 = 4$$

Então:

$$\frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{4}$$

b)  $\frac{8}{3 + \sqrt{5}}$  → o fator racionalizante é  $3 - \sqrt{5}$ ,

pois:

$$(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) = (3)^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4.$$

Então:

$$\frac{8}{3 + \sqrt{5}} = \frac{8}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{8 \cdot (3 - \sqrt{5})}{4} =$$

$$= 2(3 - \sqrt{5})$$

**10.** Racionalize.

$$a) \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$$

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2}$$

$$b) \frac{7}{\sqrt{8} - \sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2^2} - \sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{7}{2\sqrt{2} - \sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$d) \frac{3}{2 + \sqrt{3}} = \frac{3}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (2 - \sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{3 \cdot (2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 3(2 - \sqrt{3})$$

$$e) \frac{5}{3 + \sqrt{2}} = \frac{5}{3 + \sqrt{2}} \cdot \frac{3 - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \frac{5 \cdot (3 - \sqrt{2})}{9 - 2} =$$

$$= \frac{5(3 - \sqrt{2})}{7}$$

$$f) \frac{7}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{7 \cdot (\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2} = \frac{7(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5}$$

$$g) \frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{5 \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} = \frac{5(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$

$$h) \frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2^3}+\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2^2 \cdot 2}+\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{6}{2\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

## 6. Extração da raiz quadrada



Para extrair a raiz de números quadrados perfeitos, basta decompor esses números em seus fatores primos e simplificar o radical.

Exemplo:

$$\sqrt{144} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2} = 2^2 \cdot 3 = 12$$

**11.** Obtenha os valores das raízes.

$$a) \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$b) \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$$

$$c) \sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$$

$$d) \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

$$e) \sqrt{64} = \sqrt{8^2} = 8$$

$$f) \sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$$

$$g) \sqrt{225} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$h) \sqrt{196} = \sqrt{2^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 7 = 14$$

$$i) \sqrt{1} = 1$$

$$j) \sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$$

$$k) \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$$

$$l) \sqrt{400} = \sqrt{2^4 \cdot 5^2} = 2^2 \cdot 5 = 20$$

$$m) \sqrt{900} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$n) \sqrt{1600} = \sqrt{2^6 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 5 = 40$$

$$o) \sqrt{625} = \sqrt{5^4} = 5^2 = 25$$

$$p) \sqrt{1296} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

$$q) \sqrt{2500} = \sqrt{2^2 \cdot 5^4} = 2 \cdot 5^2 = 50$$

$$r) \sqrt{10000} = \sqrt{10^4} = 10^2 = 100$$

## 12. Efetue.

$$a) 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} b) \sqrt{48} + 2\sqrt{3} - \sqrt{27} + 3\sqrt{12} &= \\ &= \sqrt{4^2 \cdot 3} + 2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3^3} + 3 \cdot \sqrt{2^2 \cdot 3} = \\ &= 4 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \\ &= 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \sqrt{2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} &= \\ &= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{a^3} &= \\ \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{a^9} &= \sqrt[12]{2^4 \cdot a^9} \end{aligned}$$

$$e) \sqrt{x^3} \div \sqrt{x} = \sqrt{x^3 \div x} = \sqrt{x^2} = x$$

$$f) \sqrt[4]{a^3} \div \sqrt[6]{a} = \sqrt[12]{a^9} \div \sqrt[12]{a^2} = \sqrt[12]{a^9 \div a^2} = \sqrt[12]{a^7}$$

## 13. Racionalize.

$$a) \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$b) \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{x}$$

$$c) \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x \cdot y}}{y}$$

$$d) \frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} =$$

$$\frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y}$$

$$e) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$f) \frac{1}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{\sqrt[5]{7^3}}{7}$$



## CAPÍTULO 3 – EQUAÇÕES DO 2º GRAU

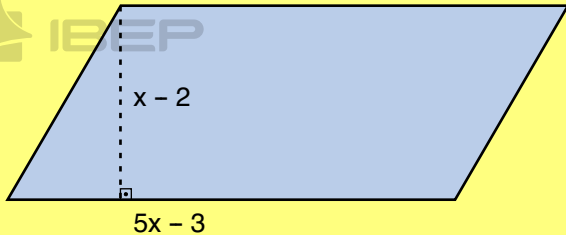


Equações do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais e  $a \neq 0$ , são denominadas **equações do 2º grau**.

$a$ ,  $b$  e  $c$  são os **coeficientes** da equação. O coeficiente  $c$  é chamado termo independente.

Exemplo:

Escreva a equação que representa a área deste paralelogramo:



$$(x - 2) \cdot (5x - 3) = 5x^2 - 3x - 10x + 6 = 5x^2 - 13x + 6$$

$$a = 5; \quad b = -13 \quad e \quad c = 6$$

**1.** Determine os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  destas equações.

a)  $5x^2 - 7x - 3 = 0$

$$a = 5; b = -7 \quad e \quad c = -3$$

b)  $x^2 - 4x + 2 = 0$

$$a = 1; b = -4 \quad e \quad c = 2$$

c)  $x^2 - x - 1 = 0$

$$a = 1; b = -1 \quad e \quad c = -1$$

d)  $2x^2 + 7x + 8 = 0$

$$a = 2; b = 7 \quad e \quad c = 8$$

e)  $5x^2 - 13x - 10 = 0$

$$a = 5; b = -13 \quad e \quad c = -10$$

### 1. Equações do 2º grau incompletas



São equações que possuem os coeficientes  $b$  e  $c$  nulos, ou apenas um deles nulo.

Exemplos:

$$5x^2 = 0 \quad 3x^2 + 2x = 0 \quad 3x^2 + 9 = 0$$

**2.** Dados os valores dos coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ , determine as equações do 2º grau com incógnita  $x$ .

Exemplo:  $a = 1; b = 5; c = -3 \rightarrow x^2 + 5x - 3 = 0$

a)  $a = 1; b = -6; c = 5$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

b)  $a = 3; b = 7; c = 8$

$$3x^2 + 7x + 8 = 0$$

c)  $a = 5; b = 10; c = 0$

$$5x^2 + 10x = 0$$

d)  $a = 3; b = 0; c = -75$

$$3x^2 - 75 = 0$$

e)  $a = 8; b = 0; c = 0$

$$8x^2 = 0$$

f)  $a = 1; b = -3; c = 4$

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

g)  $a = 7; b = 1; c = -15$

$$7x^2 + x - 15 = 0$$

## 2. Resolução de equações do 2º grau incompletas em $\mathbb{R}$



Resolver uma equação é determinar seu conjunto solução  $S$ .

**1º caso:** Quando os coeficientes  $b$  e  $c$  são nulos, ou seja,  $b = 0$  e  $c = 0$ .

$$b = 0 \text{ e } c = 0$$

$$ax^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{a} \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x \cdot x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow S = \{0\}$$

**2º caso:** Quando somente o coeficiente  $c$  é nulo, ou seja,  $b \neq 0$  e  $c = 0$ .

$$ax^2 + bx = 0$$

Colocando  $x$  em evidência:

$x(ax + b) = 0$ , um produto só é nulo quando um dos fatores é zero; assim:

$$x = 0 \text{ ou } ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow S = \left\{ 0, \frac{-b}{a} \right\}$$

**3.** Determine o conjunto solução das equações, sendo  $U = \mathbb{R}$ .

a)  $5x^2 = 0$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$

b)  $3x^2 = 0$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$

c)  $4x^2 = 0$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$

d)  $7x^2 = 0$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$

e)  $10x^2 = 0$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$

$$f) x^2 - 5x = 0$$

$$x \cdot (x - 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 5$$

$$S = \{0, 5\}$$

$$g) x^2 - 7x = 0$$

$$x \cdot (x - 7) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 7$$

$$S = \{0, 7\}$$

$$h) x^2 + 3x = 0$$

$$x \cdot (x + 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -3$$

$$S = \{0, -3\}$$

$$i) 5x^2 + 10x = 0$$

$$x \cdot (5x + 10) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -2$$

$$S = \{0, -2\}$$

$$j) 3x^2 - 6x = 0$$

$$x \cdot (3x - 6) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 2$$

$$S = \{0, 2\}$$

$$k) 4x^2 - 7x = 0$$

$$x \cdot (4x - 7) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = \frac{7}{4}$$

$$S = \left\{0, \frac{7}{4}\right\}$$

$$l) 9x^2 - 9x = 0$$

$$x \cdot (9x - 9) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$S = \{0, 1\}$$

$$m) 3x^2 + 5x = 0$$

$$x \cdot (3x + 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -\frac{5}{3}$$

$$S = \left\{0, -\frac{5}{3}\right\}$$

$$n) x^2 - x = 0$$

$$x \cdot (x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$S = \{0, 1\}$$



**3º caso:** Quando somente o coeficiente  $b$  é nulo, ou seja,  $b = 0$  e  $c \neq 0$ .

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = \frac{-c}{a}$$

$$\text{Então, } x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \rightarrow S = \left\{ \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \right\}$$

4. Resolva as equações do 2º grau, sendo

$$U = \mathbb{R};$$

a)  $6x^2 = 0$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$S = \{0\}$$

b)  $x^2 - 49 = 0$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm\sqrt{49} \rightarrow x = \pm 7$$

$$S = \{-7, 7\}$$

c)  $x^2 - 9 = 0$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$$

$$S = \{-3, 3\}$$

d)  $2x^2 - 32 = 0$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16} \rightarrow x = \pm 4$$

$$S = \{-4, 4\}$$

e)  $x^2 + 25 = 0$

$$x^2 = -25$$

$$x = \pm\sqrt{-25} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S = \emptyset$$

f)  $x^2 - 7 = 0$

$$x^2 = 7$$

$$x = \pm\sqrt{7}$$

$$S = \{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$$

g)  $5x^2 + 20 = 0$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{-4} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S = \emptyset$$

h)  $-3x^2 + 7 = 0$

$$x^2 = \frac{7}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} = \pm\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{\sqrt{21}}{3}, \frac{\sqrt{21}}{3} \right\}$$

i)  $8x^2 - 8x = 0$

$$x \cdot (8x - 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$S = \{0, 1\}$$

j)  $-x^2 - x = 0$

$$x \cdot (-x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = -1$$

$$S = \{0, -1\}$$

### 3. Resolução de equações do 2º grau completas em R



Considere a equação completa  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Para determinar os valores de  $x$  que satisfazem essa equação (raízes), utilizamos o seguinte procedimento:

- Determinamos o valor do discriminante, por meio da expressão  $\Delta = b^2 - 4ac$
- Para determinar as raízes da equação, substituímos o valor obtido na fórmula  $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ , comumente conhecida como fórmula de Bhaskara.

**Exemplo:** Determine as raízes da equação  $x^2 - 7x + 6 = 0$ .

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -7; \quad c = 6$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 49 - 24 = 25 \rightarrow \Delta = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2} \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{7 + 5}{2} = \frac{12}{2} \rightarrow x_1 = 6$$

$$x_2 = \frac{7 - 5}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow x_2 = 1$$

$$S = \{1, 6\}$$

5. Resolva as equações do 2º grau em R.

a)  $x^2 - 8x + 15 = 0$

$$a = 1; \quad b = -8; \quad c = 15$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 \rightarrow \Delta = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} \rightarrow$$



$$x_1 = \frac{8 - 2}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow x_1 = 3$$
$$x_2 = \frac{8 + 2}{2} = \frac{10}{2} \rightarrow x_2 = 5$$

$$S = \{3, 5\}$$

b)  $x^2 + 10x + 25 = 0$

$$a = 1; \quad b = 10; \quad c = 25$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = 100 - 100 \rightarrow \Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-10 \pm 0}{2 \cdot 1} = \frac{-10}{2} \rightarrow x = -5$$

$$S = \{-5\}$$



$$c) 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$a = 3; \quad b = 4; \quad c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 =$$

$$= 16 - 12 \rightarrow \Delta = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm 2}{6} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4 - 2}{6} = -\frac{6}{6} \rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 &= \frac{-4 + 2}{6} = -\frac{2}{6} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ -1, -\frac{1}{3} \right\}$$

$$d) -x^2 + 12x - 20 = 0$$

Multiplicando os dois membros por  $-1$ , temos:

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$a = 1; \quad b = -12; \quad c = 20$$

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 =$$

$$= 144 - 80 \rightarrow \Delta = 64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm 8}{2} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{12 - 8}{2} = \frac{4}{2} \rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 &= \frac{12 + 8}{2} = \frac{20}{2} \rightarrow x_2 = 10 \end{aligned}$$

$$S = \{2, 10\}$$

6. Resolva as equações do 2º grau em R.

$$a) x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 \rightarrow \Delta = 1$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm 1}{2} \\ x_1 &= \frac{-5 - 1}{2} = -\frac{6}{2} \rightarrow x_1 = -3 \\ x_2 &= \frac{-5 + 1}{2} = -\frac{4}{2} \rightarrow x_2 = -2 \end{aligned}$$

$$S = \{-3, -2\}$$

$$b) x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Delta = 49 - 48 \rightarrow \Delta = 1$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 \pm 1}{2} \\ x_1 &= \frac{7 - 1}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 &= \frac{7 + 1}{2} = \frac{8}{2} \rightarrow x_2 = 4 \end{aligned}$$

$$S = \{3, 4\}$$

$$c) x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 \rightarrow \Delta = 9$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5 \pm 3}{2} \\ x_1 &= \frac{-5 - 3}{2} = -\frac{8}{2} \rightarrow x_1 = -4 \\ x_2 &= \frac{-5 + 3}{2} = -\frac{2}{2} \rightarrow x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$S = \{-4, -1\}$$

d)  $2x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 8 \rightarrow \Delta = 1$

$$x = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{-3 - 1}{2} = -\frac{4}{2} \rightarrow x_1 = -2 \\ x_2 = \frac{-3 + 1}{2} = -\frac{2}{2} \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

$S = \{-2, -1\}$

e)  $x^2 - 18x + 45 = 0$

$\Delta = 324 - 180 \rightarrow \Delta = 144$

$$x = \frac{18 \pm 12}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{18 - 12}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{18 + 12}{2} = \frac{30}{2} \rightarrow x_2 = 15 \end{cases}$$

$S = \{3, 15\}$

f)  $-x^2 - x + 30 = 0$

$x^2 + x - 30 = 0$

$\Delta = 1 + 120 \rightarrow \Delta = 121$

$$x = \frac{-1 \pm 11}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - 11}{2} = -\frac{12}{2} \rightarrow x_1 = -6 \\ x_2 = \frac{-1 + 11}{2} = \frac{10}{2} \rightarrow x_2 = 5 \end{cases}$$

$S = \{-6, 5\}$

g)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

$\Delta = 36 - 36 \rightarrow \Delta = 0$

$$x = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow x = 3$$

$S = \{3\}$

h)  $x^2 - 3x + 10 = 0$

$\Delta = 9 - 40 \rightarrow \Delta = -31$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$S = \emptyset$

i)  $5x^2 + 6x + 3 = 0$

$\Delta = 36 - 60 \rightarrow \Delta = -24$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-24}}{10} \notin \mathbb{R}$$

$S = \emptyset$

j)  $7x^2 + x + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 56 \rightarrow \Delta = -55$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-55}}{14} \notin \mathbb{R}$$

$S = \emptyset$

k)  $2x^2 + 5x - 3 = 0$

$$\Delta = 25 + 24 \rightarrow \Delta = 49$$

$$x = \frac{-5 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} \rightarrow x_1 = -3 \\ x_2 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ -3, \frac{1}{2} \right\}$$

l)  $6x^2 + x - 1 = 0$

$$\Delta = 1 + 24 \rightarrow \Delta = 25$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{12} \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - 5}{12} = \frac{-6}{12} \rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-1 + 5}{12} = \frac{4}{12} \rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}$$

m)  $6x^2 - 13x + 6 = 0$

$$\Delta = 169 - 144 \rightarrow \Delta = 25$$

$$x = \frac{13 \pm 5}{12} \begin{cases} x_1 = \frac{13 - 5}{12} = \frac{8}{12} \rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{13 + 5}{12} = \frac{18}{12} \rightarrow x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right\}$$

n)  $5x^2 - 11x + 2 = 0$

$$\Delta = 121 - 40 \rightarrow \Delta = 81$$

$$x = \frac{11 \pm 9}{10} \begin{cases} x_1 = \frac{11 - 9}{10} = \frac{2}{10} \rightarrow x_1 = \frac{1}{5} \\ x_2 = \frac{11 + 9}{10} = \frac{20}{10} \rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{5}, 2 \right\}$$

o)  $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\Delta = 4 - 4 \rightarrow \Delta = 0$$

$$x = \frac{2 \pm 0}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow x = 1$$

$$S = \{1\}$$

p)  $x^2 - 4x + 5 = 0$

$$\Delta = 16 - 20 \rightarrow \Delta = -4$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \notin \mathbb{R}$$

$$S = \emptyset$$

q)  $4x^2 + 11x - 3 = 0$

$$\Delta = 121 + 48 \rightarrow \Delta = 169$$

$$x = \frac{-11 \pm 13}{8} \begin{cases} x_1 = \frac{-11 - 13}{8} = \frac{-24}{8} \rightarrow x_1 = -3 \\ x_2 = \frac{-11 + 13}{8} = \frac{2}{8} \rightarrow x_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$S = \left\{ -3, \frac{1}{4} \right\}$$



Para determinar as raízes de uma equação do 2º grau com o auxílio da fórmula de Bhaskara, a equação deve ser expressa na forma geral  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Exemplo:

$$(x + 3)^2 = 1$$

$$x^2 + 6x + 9 = 1$$

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$\Delta = 36 - 32 \rightarrow \Delta = 4$$

$$x = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{-6 - 2}{2} = \frac{-8}{2} \rightarrow x_1 = -4 \\ x_2 = \frac{-6 + 2}{2} = \frac{-4}{2} \rightarrow x_2 = -2 \end{cases}$$

$$S = \{-4, -2\}$$

7. Resolva as equações em R.

a)  $(3x + 1)^2 = 0$

$$9x^2 + 6x + 1 = 0$$

$$\Delta = 36 - 36 \rightarrow \Delta = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm 0}{18} = \frac{-6}{18} \rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$$

b)  $(2x - 4)^2 = 0$

$$4x^2 - 16x + 16 = 0$$

$$\Delta = 256 - 256 \rightarrow \Delta = 0$$

$$x = \frac{16 \pm 0}{8} = \frac{16}{8} \rightarrow x = 2$$

$$S = \{2\}$$

c)  $(x - 3)^2 = -2x^2$

$$x^2 - 6x + 9 = -2x^2$$

$$3x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Delta = 36 - 108 \rightarrow \Delta = -72$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-72}}{6} \notin \mathbb{R}$$

$$S = \emptyset$$

d)  $x(x - 5) = -6$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 \rightarrow \Delta = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} \rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

$$S = \{2, 3\}$$

e)  $x(3x + 4) = -1$

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 \rightarrow \Delta = 4$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{6} \begin{cases} x_1 = \frac{-4 - 2}{6} = \frac{-6}{6} \rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-4 + 2}{6} = \frac{-2}{6} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ -1, -\frac{1}{3} \right\}$$

$$f) \frac{x^2}{2} + x = 0$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x \cdot (x + 2) = 0$$

$$x = 0$$

ou

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2$$

$$S = \{0, -2\}$$

$$h) \frac{1}{x} = \frac{x}{9} \quad (x \neq 0)$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3$$

$$S = \{-3, 3\}$$

$$i) (x - 5)^2 = 4$$

$$x^2 - 10x + 25 = 4$$

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$\Delta = 100 - 84 \rightarrow \Delta = 16$$

$$x = \frac{10 \pm 4}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{10 - 4}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = \frac{10 + 4}{2} = \frac{14}{2} \rightarrow x_2 = 7 \end{cases}$$

$$S = \{3, 7\}$$

$$g) \frac{6}{x^2} = -\frac{1}{x} + 1 \quad (x \neq 0)$$

$$\frac{6}{x^2} = \frac{-x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}$$

$$6 = -x + x^2$$

$$-x^2 + x + 6 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 \rightarrow \Delta = 25$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} \rightarrow x_1 = -2 \\ x_2 = \frac{1 + 5}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

$$S = \{-2, 3\}$$

$$j) x(2x - x) = 5x - 6$$

$$2x^2 - x^2 = 5x - 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 \rightarrow \Delta = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} \rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{5 + 1}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$$

$$S = \{2, 3\}$$

$$k) (x + 5)(x - 5) = 0$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$x^2 = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} \rightarrow x = \pm 5$$

$$S = \{-5, 5\}$$

$$l) (x + 3)(x - 3) = 0$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x = -3$$

ou

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$S = \{-3, 3\}$$

$$m) \frac{x^2 + 3x}{6} = \frac{2}{3}$$

$$x^2 + 3x = 4$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 \rightarrow \Delta = 25$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{-3 - 5}{2} = -\frac{8}{2} \rightarrow x_1 = -4 \\ x_2 = \frac{-3 + 5}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$$

$$S = \{-4, 1\}$$

$$n) \frac{5x^2}{3} - \frac{2x}{5} = 0$$

$$25x^2 - 6x = 0$$

$$x \cdot (25x - 6) = 0$$

$$x = 0$$

ou

$$25x - 6 = 0 \rightarrow 25x = 6 \rightarrow x = \frac{6}{25}$$

$$S = \left\{ 0, \frac{6}{25} \right\}$$

$$o) (x - 2)(x - 3) = 12$$

$$x^2 - 3x - 2x + 6 = 12$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Delta = 25 + 24 \rightarrow \Delta = 49$$

$$x = \frac{5 \pm 7}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{5 - 7}{2} = -\frac{2}{2} \rightarrow x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{5 + 7}{2} = \frac{12}{2} \rightarrow x_2 = 6 \end{cases}$$

$$S = \{-1, 6\}$$

## 4. Discussão quanto às raízes de uma equação do 2º grau



IBEP

A resolução de equações do 2º grau, por meio da fórmula de Bhaskara, depende do valor do discriminante  $\Delta$ :

- Quando  $\Delta > 0$ , a equação apresenta duas raízes reais e diferentes.
- Quando  $\Delta = 0$ , a equação apresenta duas raízes reais e iguais.
- Quando  $\Delta < 0$ , a equação não apresenta nenhuma raiz real.

8. Calcule apenas o  $\Delta$  e responda se a equação admite: duas raízes reais e diferentes, duas raízes reais e iguais ou não admite nenhuma raiz real.

a)  $x^2 - 5x + 1 = 0$

$$\Delta = 25 - 4 \longrightarrow \Delta = 21 > 0$$

Admite duas raízes reais e diferentes.

b)  $x^2 + 6x + 8 = 0$

$$\Delta = 24 - 32 \longrightarrow \Delta = -8 < 0$$

Não admite nenhuma raiz real.

c)  $x^2 - 3x + 4 = 0$

$$\Delta = 9 - 16 \longrightarrow \Delta = -7 < 0$$

Não admite nenhuma raiz real.

d)  $x^2 - 16x + 64 = 0$

$$\Delta = 256 - 256 \longrightarrow \Delta = 0$$

Admite duas raízes reais e iguais.

e)  $5x^2 + x + 3 = 0$

$$\Delta = 1 - 60 \longrightarrow \Delta = -59 < 0$$

Não admite nenhuma raiz real.

f)  $x^2 - 3x = 0$

$$\Delta = 9 - 0 \longrightarrow \Delta = 9 > 0$$

Admite duas raízes reais e diferentes.

g)  $4x^2 - 16 = 0$

$$\Delta = 0 + 256 \longrightarrow \Delta = 256 > 0$$

Admite duas raízes reais e diferentes.

h)  $x^2 + 5 = 0$

$$\Delta = 0 - 20 \longrightarrow \Delta = -20 < 0$$

Não admite nenhuma raiz real.

## 5. Como determinar os coeficientes de uma equação do 2º grau



### Exemplos:

1) Calcule o valor de  $m$  na equação  $x^2 - 4x - m = 0$ , para que ela admita duas raízes reais e diferentes.

$$x^2 - 4x - m = 0$$

$$a = 1; \quad b = -4; \quad c = -m$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) = 16 + 4m$$

$$\Delta = 16 + 4m$$

Para que essa equação tenha duas raízes reais e diferentes o valor de  $\Delta$  tem que ser maior do que zero ( $\Delta > 0$ ). Como  $\Delta = 16 + 4m$ , temos:

$$16 + 4m > 0$$

$$4m > -16$$

$$m > \frac{-16}{4} \rightarrow m > -4$$

Para essa equação ter duas raízes reais diferentes, o valor de  $m$  tem que ser maior do que  $-4$ .

2) Calcule o valor de  $k$  na equação  $x^2 - 10x + 5k = 0$ , para que ela admita duas raízes reais e iguais.

$$x^2 - 10x + 5k = 0$$

$$a = 1; \quad b = -10; \quad c = 5k$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5k = 100 - 20k$$

$\Delta = 100 - 20k$ , para termos raízes reais e iguais:

$$\Delta = 0, \text{ então,}$$

$$100 - 20k = 0$$

$$-20k = -100 \quad (-1)$$

$$20k = 100$$

$$k = \frac{100}{20} \rightarrow k = 5$$

3) Calcule o valor de  $m$  na equação  $x^2 - 8x + (m + 1) = 0$ , para que ela não admita nenhuma raiz real.

$$x^2 - 8x + (m + 1) = 0$$

$$a = 1; \quad b = -8; \quad c = m + 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m + 1) =$$

$$= 64 - 4m - 4$$

$\Delta = 60 - 4m$ , para que ela não admita nenhuma raiz real:

$$\Delta < 0, \text{ então,}$$

$$60 - 4m < 0$$

$$-4m < -60 \quad (-1)$$

$$4m > 60 \rightarrow m > \frac{60}{4} \rightarrow m > 15$$



**9.** Para que valores de  $m$  a equação  $x^2 - 4x + 2m = 0$  possui duas raízes reais e diferentes?

$$\Delta > 0 \rightarrow 16 - 8m > 0 \rightarrow -8m > -16$$

$$8m < 16$$

$$m < 2$$

**10.** Para que valores de  $m$  a equação  $x^2 + 2x + 6m = 0$  possui duas raízes reais e diferentes?

$$\Delta > 0 \rightarrow 4 - 24m > 0 \rightarrow -24m > -4$$

$$24m < 4$$

$$m < \frac{1}{6}$$

**11.** Calcule o valor de  $k$  na equação  $x^2 + x + 3k = 0$ , para que ela admita duas raízes reais e diferentes.

$$\Delta > 0 \rightarrow 1 - 12k > 0 \rightarrow -12k > -1$$

$$12k < 1$$

$$k < \frac{1}{12}$$

**12.** Para que valores de  $m$  a equação  $5x^2 + 10x - m = 0$  possui duas raízes reais e iguais?

$$\Delta = 0 \rightarrow 100 + 20m = 0 \rightarrow 20m = -100$$

$$m = -5$$

**13.** Calcule o valor de  $p$  na equação  $3x^2 - 5x + 5p = 0$ , para que ela admita duas raízes reais e iguais.

$$\Delta = 0 \rightarrow 25 - 60 \cdot p = 0 \rightarrow -60 \cdot p = -25$$

$$60p = 25$$

$$p = \frac{25}{60}$$

$$p = \frac{5}{12}$$

**14.** Para que valores de  $k$  a equação  $x^2 - 8x + (k + 1) = 0$  admite duas raízes reais e iguais?

$$\Delta = 0 \rightarrow 64 - 4 \cdot (k + 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 64 - 4k - 4 = 0$$

$$-4k = 4 - 64$$

$$-4k = -60$$

$$k = 15$$

**15.** Para que valores de  $m$  a equação  $x^2 - 3x + (m - 1) = 0$  não admite nenhuma raiz real?

$$\Delta < 0 \rightarrow 9 - 4 \cdot (m - 1) < 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9 - 4m + 4 < 0$$

$$-4m < -13$$

$$4m > 13$$

$$m > \frac{13}{4}$$

**16.** Calcule o valor de  $k$  na equação

$x^2 - 10x + k = 0$ , para que ela não admita nenhuma raiz real.

$$\Delta < 0 \rightarrow 100 - 4k < 0 \rightarrow -4k < -100$$

$$4k > 100$$

$$k > 25$$

**17.** Calcule o valor de  $p$  na equação

$x^2 - 6x - p = 0$ , para que ela:

a) não admita nenhuma raiz real;

$$\Delta < 0 \rightarrow 36 + 4p < 0 \rightarrow 4p < -36$$

$$p < -9$$

b) admita duas raízes reais e iguais;

$$\Delta = 0 \rightarrow 36 + 4p = 0 \rightarrow 4p = -36$$

$$p = -9$$

c) admita duas raízes reais e desiguais.

$$\Delta > 0 \rightarrow 36 + 4p > 0 \rightarrow 4p > -36$$

$$p > -9$$

**18.** Determine o valor de  $m$  na equação

$x^2 - 3x + (m + 1) = 0$ , para que ela:

a) admita duas raízes reais e iguais;

b) admita duas raízes reais e diferentes;

c) não admita nenhuma raiz real.

$$a) \Delta = 0 \rightarrow 9 - 4(m + 1) = 0$$

$$9 - 4m - 4 = 0$$

$$5 - 4m = 0 \rightarrow -4m = -5$$

$$m = \frac{5}{4}$$

$$b) \Delta > 0 \rightarrow 9 - 4(m + 1) > 0$$

$$-4m > -5 \rightarrow 4m < 5$$

$$m > \frac{5}{4}$$

$$c) \Delta < 0 \rightarrow 9 - 4(m + 1) < 0$$

$$-4m < -5 \rightarrow 4m > 5$$

$$m > \frac{5}{4}$$

## 6. Relações entre coeficientes e raízes de uma equação do 2º grau



### Soma das raízes

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \rightarrow S = \frac{-b}{a}$$

### Produto das raízes

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow P = \frac{c}{a}$$

Exemplos:

Determine a soma e o produto das raízes sem resolver a equação:

a)  $3x^2 + 6x - 9 = 0$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{3} = -2 \rightarrow S = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-9}{3} = -3 \rightarrow P = -3$$

b)  $x^2 - 5x = 0$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = \frac{5}{1} = 5 \rightarrow S = 5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow P = 0$$

19. Determine a soma **S** e o produto **P** das raízes das equações, sem resolvê-las:

a)  $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$S = \frac{6}{1} \rightarrow S = 6; P = \frac{8}{1} \rightarrow P = 8$$

b)  $5x^2 + 10x - 20 = 0$

$$S = \frac{-10}{5} \rightarrow S = -2; P = \frac{-20}{5} \rightarrow P = -4$$

c)  $3x^2 - 6x - 10 = 0$

$$S = \frac{6}{3} \rightarrow S = 2; P = \frac{-10}{3}$$

d)  $7x^2 + 14x - 21 = 0$

$$S = \frac{-14}{7} \rightarrow S = -2; P = \frac{-21}{7} \rightarrow P = -3$$

e)  $x^2 - 3x = 0$

$$S = \frac{3}{1} \rightarrow S = 3; P = \frac{0}{1} \rightarrow P = 0$$

f)  $x^2 + 7x = 0$

$$S = \frac{-7}{1} \rightarrow S = -7; P = \frac{0}{1} \rightarrow P = 0$$

g)  $x^2 - 9 = 0$

$$S = \frac{0}{1} \rightarrow S = 0; P = \frac{-9}{1} \rightarrow P = -9$$

h)  $5x^2 + 7x = 0$

$$S = \frac{-7}{5}; P = \frac{0}{5} \rightarrow P = 0$$

i)  $9x^2 - 18x = 0$

$$S = \frac{18}{9} \rightarrow S = 2; P = \frac{0}{9} \rightarrow P = 0$$

j)  $6x^2 = 0$

$$S = \frac{0}{6} \rightarrow S = 0; P = \frac{0}{6} \rightarrow P = 0$$

k)  $3x^2 + 5x - 7 = 0$

$$S = \frac{-5}{3}; P = \frac{-7}{3}$$

l)  $8x^2 - 3x - 16 = 0$

$S = \frac{3}{8}; P = \frac{-16}{8} \rightarrow P = -2$



## 7. Formando uma equação do 2º grau a partir de suas raízes



Considere a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ).  
Dividindo-a por **a**, temos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Sendo  $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$  e  $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ,  
então, podemos escrever:  $x^2 - Sx + P = 0$

Exemplo:

Compor a equação do 2º grau de raízes  
 $x_1 = 8$  e  $x_2 = 2$ .

$$\left. \begin{array}{l} S = x_1 + x_2 = 10 \\ P = x_1 \cdot x_2 = 16 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$$

**20.** Compor as equações do 2º grau

(com  $a = 1$ ) que têm por raízes:

a) 5 e 2

$S = 7$  e  $P = 10 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

b) 1 e 1

$S = 2$  e  $P = 1 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

c) 2 e 0

$S = 2$  e  $P = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0$

d) 0 e -3

$S = -3$  e  $P = 0 \rightarrow x^2 + 3x = 0$

e) 5 e -5

$S = 0$  e  $P = -25 \rightarrow x^2 - 25 = 0$

f) 0 e 0

$S = 0$  e  $P = 0 \rightarrow x^2 = 0$

g) 3 e 5

$S = 8$  e  $P = 15 \rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$

h) -2 e -5

$S = -7$  e  $P = 10 \rightarrow x^2 + 7x + 10 = 0$

i) 8 e -3

$S = 5$  e  $P = -24 \rightarrow x^2 - 5x - 24 = 0$

j) -2 e -3

$S = -5$  e  $P = 6 \rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$

k) 0 e -1

$S = -1$  e  $P = 0 \rightarrow x^2 + x = 0$

l) 4 e -5

$S = -1$  e  $P = -20 \rightarrow x^2 + x - 20 = 0$

Exemplos:

1) Determine dois números cuja soma seja 20 e o produto 36.

$$\left. \begin{array}{l} S = 20 \\ P = 36 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 20x + 36 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$\Delta = 400 - 4 \cdot 1 \cdot 36$$

$$\Delta = 256$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{256}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{20 + 16}{2} = \frac{36}{2} = 18 \\ x_2 = \frac{20 - 16}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Os números são 18 e 2.

2) Determine  $m$  na equação  $x^2 + 7x + m = 0$ , de modo que uma raiz seja igual a 2.

$$S = -7 \text{ ou } x_1 + x_2 = -7$$

$$P = m \text{ ou } x_1 \cdot x_2 = m$$

$$\text{Se } x_1 = 2 \rightarrow 2 + x_2 = -7$$

$$x_2 = -7 - 2 \rightarrow x_2 = -9$$

$$\text{Se } m = x_1 \cdot x_2 \rightarrow m = 2 \cdot (-9) \rightarrow m = -18$$

**21.** Ache dois números cuja soma seja 30 e o produto 56.

$$x^2 - 30x + 56 = 0$$

$$\Delta = 900 - 224 \rightarrow \Delta = 676 = (26)^2$$

$$x = \frac{30 \pm 26}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{30 - 26}{2} = \frac{4}{2} \rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{30 + 26}{2} = \frac{56}{2} \rightarrow x_2 = 28 \end{cases}$$

Os números são 2 e 28.

**22.** Determine dois números cuja soma seja 15 e o produto 14.

$$x^2 - 15x + 14 = 0$$

$$\Delta = 225 - 56 \rightarrow \Delta = 169 = (13)^2$$

$$x = \frac{15 \pm 13}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{15 - 13}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{15 + 13}{2} = \frac{28}{2} \rightarrow x_2 = 14 \end{cases}$$

Os números são 1 e 14.

**23.** Determine dois números que tenham por soma 36 e produto 180.

$$x^2 - 36x + 180 = 0$$

$$\Delta = 1296 - 720 \rightarrow \Delta = 576 = (24)^2$$

$$x = \frac{36 \pm 24}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{36 - 24}{2} = \frac{12}{2} \rightarrow x_1 = 6 \\ x_2 = \frac{36 + 24}{2} = \frac{60}{2} \rightarrow x_2 = 30 \end{cases}$$

Os números são 6 e 30.

**24.** Calcule  $m$  na equação  $x^2 - 5x + 3m = 0$ , de modo que uma raiz seja igual a 3.

$$S = \frac{-b}{a} \rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-(-5)}{1} \rightarrow 3 + x_2 = 5 \rightarrow x_2 = 2$$

$$P = \frac{c}{a} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{3m}{1} \rightarrow 3 \cdot 2 = 3m \rightarrow 6 = 3m$$

$$m = 2$$

**25.** Determine o valor de  $k$  na equação  $x^2 + 3x + (k + 1) = 0$ , para que ela tenha duas raízes reais e iguais.

$$S = \frac{-b}{a} \rightarrow x_1 + x_1 = \frac{-3}{1} \rightarrow 2x_1 = -3 \rightarrow x_1 = \frac{-3}{2}$$

$$P = \frac{c}{a} \rightarrow x_1 \cdot x_1 = \frac{k + 1}{1} \rightarrow \frac{-3}{2} \cdot \left(\frac{-3}{2}\right) = k + 1$$

$$\frac{9}{4} = k + 1$$

$$9 = 4k + 4 \rightarrow 4k = 5$$

$$k = \frac{5}{4}$$

## 8. Raízes simétricas



Raízes simétricas são aquelas cujos sinais são opostos.

Genericamente:  $|x_1| = |-x_2|$

Quando as raízes são simétricas, temos

$S = 0$ , pois  $S = x_1 + x_2$ .

**26.** Determine  $p$  em  $x^2 + (p - 5)x - 81 = 0$  para que as raízes sejam simétricas.

$$S = \frac{-b}{a} \rightarrow 0 = -\frac{(p - 5)}{1} \rightarrow 0 = -p + 5$$

$$p = 5$$

**27.** Determine o valor de  $k$  em  $x^2 - (k + 2)x + 6 = 0$ , para que as raízes sejam simétricas.

$$S = \frac{-b}{a}$$

$$0 = \frac{-(k + 2)}{1}$$

$$0 = k + 2$$

$$0 = k + 2$$

$$k = -2$$



# CAPÍTULO 4 – EQUAÇÕES BIQUADRADAS E EQUAÇÕES IRRACIONAIS

## 1. Equações biquadradas



Equações biquadradas são escritas genericamente da seguinte forma:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ . Para determinar suas raízes, devemos apresentá-la como uma equação do 2º grau.

### Raiz de uma equação biquadrada

Exemplo: Sendo  $U = \mathbb{R}$ , determine as raízes das equações seguintes.

a)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Substituindo  $x^2$  por  $y$  e  $x^4$  por  $y^2$ , vem:  
 $y^2 - 5y + 4 = 0$ .

Resolvendo essa equação:

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow y_1 = 4 \text{ e } y_2 = 1$$

Como  $x^2 = y$ , temos:

$$x^2 = 4 \leftrightarrow x = \pm \sqrt{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$x^2 = 1 \leftrightarrow x = \pm \sqrt{1} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

$$S = \{-1, 1, -2, 2\}$$

b)  $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Substituindo  $x^2$  por  $y$  e  $x^4$  por  $y^2$ , temos:  
 $y^2 + 2y - 3 = 0$

Resolvendo essa equação:

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \rightarrow y_1 = 1 \text{ e } y_2 = -3$$

Como  $x^2 = y$ , temos:

$$x^2 = 1 \leftrightarrow x = \pm \sqrt{1} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$x^2 = -3 \leftrightarrow x = \pm \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$

$$S = \{-1, 1\}$$

Essa equação tem apenas duas raízes reais.

Agora, faça você.

1. Assinale as alternativas que apresentam equações biquadradas.

a)  $x^2 + 3x - 7 = 0$     e)  $5x^4 + x^3 - x^2 = 0$

b)  $x^4 - x^2 + 3 = 0$      f)  $3x^4 + 5x^2 - 10 = 0$

c)  $x^4 - 25 = 0$      g)  $x^4 + 5x^2 + 8 = 0$

d)  $x^4 - 16x^2 = 0$     h)  $x^4 + 5x + 10 = 0$

2. Resolva as equações para  $U = \mathbb{R}$ .

a)  $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

$$y^2 - 17y + 16 = 0$$

$$\Delta = 289 - 64 \rightarrow \Delta = 225 = (15)^2$$

$$y = \frac{17 \pm 15}{2} \rightarrow$$

$$y_1 = \frac{17 - 15}{2} \rightarrow y_1 = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \pm \sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$$

$$y_2 = \frac{17 + 15}{2} \rightarrow y_2 = 16 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \pm \sqrt{16} \rightarrow x = \pm 4$$

$$S = \{-1, 1, -4, 4\}$$

$$b) x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$y^2 - 13y + 36 = 0$$

$$\Delta = 169 - 144 \rightarrow \Delta = 25 = (5)^2$$

$$y = \frac{13 \pm 5}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{13 - 5}{2} \rightarrow y_1 = 4 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow \\ \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{13 + 5}{2} \rightarrow y_2 = 9 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \\ \rightarrow x = \pm\sqrt{9} \rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

$$S = \{-2, 2, -3, 3\}$$

$$c) x^4 - 6x^2 + 5 = 0$$

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 20 \rightarrow \Delta = 16 = (4)^2$$

$$y = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{6 - 4}{2} \rightarrow y_1 = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \\ \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{6 + 4}{2} \rightarrow y_2 = 5 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow \\ \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

$$S = \{-1, 1, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$$

$$d) x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 \rightarrow \Delta = 9 = (3)^2$$

$$y = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{-1 - 3}{2} \rightarrow y_1 = -2 \rightarrow x^2 = -2 \rightarrow \\ \rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = \frac{-1 + 3}{2} \rightarrow y_2 = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow \\ \rightarrow x = \pm\sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$S = \{-1, 1\}$$

$$e) x^4 - 2x^2 + 7 = 0$$

$$y^2 - 2y + 7 = 0$$

$$\Delta = 4 - 28 \rightarrow \Delta = -24 < 0 \rightarrow \text{Não há raízes reais.}$$

$$S = \emptyset$$

$$f) x^4 + 3x^2 + 5 = 0$$

$$y^2 + 3y + 5 = 0$$

$$\Delta = 9 - 20 \rightarrow \Delta = -11 < 0 \rightarrow \text{Não há raízes reais.}$$

$$S = \emptyset$$

$$g) x^4 - 64 = 0$$

$$y^2 - 64 = 0$$

$$y^2 = 64 \rightarrow y = \pm\sqrt{64} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_1 = -8 \rightarrow x^2 = -8 \rightarrow \\ \rightarrow x = \pm\sqrt{-8} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = 8 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8} \\ x = \pm\sqrt{2^3} \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$S = \{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$$



## 2. Equações irracionais



Equações que possuem variáveis em um radicando são denominadas **equações irracionais**. Exemplo:  $\sqrt{2x+3} = 3x - 17$

### Solução de uma equação irracional

Exemplos: Determine a solução das equações irracionais, para  $U = \mathbb{R}$ .

1)  $\sqrt{x} = 7$

Elevando ao quadrado ambos os membros:

$$(\sqrt{x})^2 = 7^2 \rightarrow x = 49$$

Verificação:

$$\sqrt{49} = 7 \rightarrow 7 = 7 \text{ (Verdadeiro)}$$

Logo,  $S = \{49\}$ .

2)  $5 + 3\sqrt{x-1} = x$

Isolamos o radical no 1º membro:

$$3\sqrt{x-1} = x - 5$$

Elevamos ao quadrado ambos os membros:

$$(3\sqrt{x-1})^2 = (x-5)^2$$

$$9(x-1) = x^2 - 10x + 25$$

$$9x - 9 = x^2 - 10x + 25$$

$$x^2 - 19x + 34 = 0$$

Resolvendo essa equação, temos:

$$x_1 = 17 \text{ e } x_2 = 2$$

Verificação:

$$\text{Para } x = 17 \rightarrow 3\sqrt{17-1} = 17 - 5$$

$$3 \cdot 4 = 12 \rightarrow 12 = 12 \text{ (Verdadeiro)}$$

$$\text{Para } x = 2 \rightarrow 3\sqrt{2-1} = 2 - 5$$

$$3 \cdot 1 = 3 \rightarrow 3 = -3 \text{ (Falso)}$$

Logo,  $S = \{17\}$ .

3)  $\sqrt{x+20} - \sqrt{x+4} = 2$

Isolamos um dos radicais em um dos membros:

$$\sqrt{x+20} = 2 + \sqrt{x+4}$$

Elevamos ao quadrado ambos os membros:

$$(\sqrt{x+20})^2 = (2 + \sqrt{x+4})^2$$

$$x + 20 = 4 + 4\sqrt{x+4} + x + 4$$

Isolamos novamente o radical:

$$x + 20 - 4 - x - 4 = 4\sqrt{x+4}$$

$12 = 4\sqrt{x+4}$ , dividindo ambos os membros por 4:

$$3 = \sqrt{x+4}$$

Elevamos ao quadrado ambos os membros:

$$9 = x + 4 \rightarrow x = 5$$

Verificação:

$$\sqrt{5+20} - \sqrt{5+4} = 2$$

$$\sqrt{25} - \sqrt{9} = 2$$

$$5 - 3 = 2$$

$$2 = 2 \text{ (Verdadeiro)}$$

Logo,  $S = \{5\}$ .

4)  $\sqrt[3]{5 + \sqrt{x+2}} = 2$

Elevamos ao cubo ambos os membros:

$$(\sqrt[3]{5 + \sqrt{x+2}})^3 = 2^3$$

$$5 + \sqrt{x+2} = 8$$

Isolamos o radical e elevamos ao quadrado ambos os membros:

$$\sqrt{x+2} = 3$$

$$(\sqrt{x+2})^2 = 3^2$$

$$x + 2 = 9 \rightarrow x = 7$$

Verificação:

$$\sqrt[3]{5 + \sqrt{7+2}} = 2$$

$$\sqrt[3]{5 + \sqrt{9}} = 2$$

$$\sqrt[3]{5 + 3} = 2$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$2 = 2 \text{ (Verdadeiro)}$$

Logo,  $S = \{7\}$ .

**3.** Resolva as equações irracionais em R.

a)  $\sqrt{x} = 5$

$$x = 5^2 \rightarrow x = 25$$

Verificação:

$$\sqrt{25} = 5$$

$$5 = 5 \text{ (V)}$$

$$S = \{5\}$$

b)  $\sqrt{x+3} = x-3$

$$x+3 = (x-3)^2 \rightarrow x+3 = x^2 - 6x + 9$$

$$-x^2 + 6x - 9 + x + 3 = 0$$

$$-x^2 + 7x - 6 = 0$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Delta = 49 - 24 \rightarrow \Delta = 25 = (5)^2$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{7-5}{2} \rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{7+5}{2} \rightarrow x_2 = 6 \end{cases}$$

Verificação:

- para  $x = 1 \rightarrow \sqrt{1+3} = 1-3$

$$\sqrt{4} = -2$$

$$2 = -2 \text{ (F)}$$

- para  $x = 6 \rightarrow \sqrt{6+3} = 6-3$

$$\sqrt{9} = 3$$

$$3 = 3 \text{ (V)}$$

$$S = \{6\}$$

c)  $\sqrt{2x+2} = x+1$

$$2x+2 = (x+1)^2 \rightarrow 2x+2 = x^2 + 2x + 1$$

$$-x^2 - 2x - 1 + 2x + 2 = 0$$

$$-x^2 + 1 = 0$$

$$-x^2 = -1$$

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{1}$$

$$x = \pm 1$$

Verificação:

- para  $x = -1 \rightarrow \sqrt{2 \cdot (-1) + 2} = -1 + 1$

$$\sqrt{-2+2} = 0$$

$$\sqrt{0} = 0$$

$$0 = 0 \text{ (V)}$$

- para  $x = 1 \rightarrow \sqrt{2 \cdot 1 + 2} = 1 + 1$

$$\sqrt{2+2} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2 \text{ (V)}$$

$$S = \{-1, 1\}$$

d)  $\sqrt{x+9} + x = 11$

$$\sqrt{x+9} = 11-x \rightarrow x+9 = (11-x)^2$$

$$x+9 = 121 - 22x + x^2$$

$$-x^2 + 22x - 121 + x + 9 = 0$$

$$-x^2 + 23x - 112 = 0$$

$$x^2 - 23x + 112 = 0$$

$$\Delta = 529 - 448 \rightarrow \Delta = 81 = (9)^2$$

$$x = \frac{23 \pm 9}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{23-9}{2} \rightarrow x_1 = 7 \\ x_2 = \frac{23+9}{2} \rightarrow x_2 = 16 \end{cases}$$

Verificação:

- para  $x = 7 \rightarrow \sqrt{7+9} + 7 = 11$

$$\sqrt{16} + 7 = 11$$

$$4 + 7 = 11$$

$$11 = 11 \text{ (V)}$$

- para  $x = 16 \rightarrow \sqrt{16+9} + 16 = 11$

$$\sqrt{25} + 16 = 11$$

$$5 + 16 = 11$$

$$21 = 11 \text{ (F)}$$

$$S = \{7\}$$

$$e) \sqrt[3]{x+1} = 2$$

$$x+1 = 2^3$$

$$x+1 = 8$$

$$x = 7$$

Verificação:

$$\sqrt[3]{7+1} = 2$$

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

$$2 = 2 \text{ (V)}$$

$$S = \{7\}$$

$$g) \sqrt{x} = x$$

$$x = x^2 \rightarrow -x^2 + x = 0$$

$$x(-x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{cases}$$

Verificação:

- para  $x = 0 \rightarrow \sqrt{0} = 0$   
 $0 = 0 \text{ (V)}$

- para  $x = 1 \rightarrow \sqrt{1} = 1$   
 $1 = 1 \text{ (V)}$

$$S = \{0, 1\}$$

$$f) \sqrt[5]{x} = 2$$

$$x = (2)^5$$

$$x = 32$$

Verificação:

$$\sqrt[5]{32} = 2$$

$$2 = 2 \text{ (V)}$$

$$S = \{32\}$$

$$h) 4 = \sqrt[2]{x+4}$$

$$(4)^2 = (\sqrt{x+4})^2$$

$$16 = x+4$$

$$12 = x$$

$$i) \sqrt{2x-10} = 3$$

$$(\sqrt{2x-10})^2 = (3)^2$$

$$2x-10 = 9$$

$$2x = 9+10$$

$$x = \frac{19}{2}$$



## CAPÍTULO 5 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES

### Solução de um sistema de equações

Exemplos:

1) O produto de dois números reais é  $-180$  e a soma desses números é  $3$ . Quais são esses números?

$$\begin{cases} x \cdot y = -180 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Isolando  $x$  na equação  $x + y = 3$ , temos

$$x = 3 - y.$$

Substituindo esse valor de  $x$  em

$$x \cdot y = -180, \text{ obtemos:}$$

$$(3 - y) \cdot y = -180$$

$$3y - y^2 = -180$$

$$y^2 - 3y - 180 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:

$$y_1 = 15; y_2 = -12$$

Substituindo  $y$  em  $x = 3 - y$ , temos:

$$\text{Para } y = 15 \rightarrow x = 3 - 15 \rightarrow x = -12 \rightarrow (-12, 15)$$

$$\text{Para } y = -12 \rightarrow x = 3 - (-12) \rightarrow x = 15 \rightarrow (15, -12)$$

Portanto,  $S = \{(-12, 15), (15, -12)\}$ .

$$2) \begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Isolando  $x$  na equação  $x + y = 7$ , temos  $x = 7 - y$ .

Substituindo esse valor de  $x$  em  $x^2 + y^2 = 25$ , obtemos:

$$(7 - y)^2 + y^2 = 25$$

$$49 - 14y + y^2 + y^2 = 25$$

$$2y^2 - 14y + 49 - 25 = 0$$

$$2y^2 - 14y + 24 = 0.$$

Dividindo ambos os membros por  $2$  e resolvendo a equação do 2º grau, temos:

$$y_1 = 4; y_2 = 3$$

Substituindo  $y$  em  $x = 7 - y$ , temos:

$$\text{Para } y = 4 \rightarrow x = 7 - 4 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 4)$$

$$\text{Para } y = 3 \rightarrow x = 7 - 3 \rightarrow x = 4 \rightarrow (4, 3)$$

Portanto,  $S = \{(3, 4), (4, 3)\}$ .

1. Resolva os sistemas de equações.

$$a) \begin{cases} x + y = 7 \rightarrow x = 7 - y \\ x \cdot y = 10 \rightarrow (7 - y) \cdot y = 10 \end{cases}$$

$$7y - y^2 = 10$$

$$-y^2 + 7y - 10 = 0$$

$$y^2 - 7y + 10 = 0$$

$$\Delta = 49 - 40 \Rightarrow \Delta = 9 = (3)^2$$

$$y = \frac{7 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{7 - 3}{2} \rightarrow y_1 = 2 \\ y_2 = \frac{7 + 3}{2} \rightarrow y_2 = 5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{para } y = 2 \rightarrow x = 7 - 2 \rightarrow x = 5 \rightarrow (5, 2)$$

$$\rightarrow \text{para } y = 5 \rightarrow x = 7 - 5 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 5)$$

$$S = \{(5, 2); (2, 5)\}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 3 & \rightarrow x = 3 + y \\ x^2 + y^2 = 45 & \rightarrow (3 + y)^2 + y^2 = 45 \end{cases}$$

$$9 + 6y + y^2 + y^2 = 45$$

$$2y^2 + 6y - 36 = 0$$

$$\Delta = 36 + 288 \rightarrow \Delta = 324 = (18)^2$$

$$y_1 = \frac{-6 - 18}{4} \rightarrow y_1 = -6$$

$$y_2 = \frac{-6 + 18}{4} \rightarrow y_2 = 3$$

$$y = \frac{-6 \pm 18}{4} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -6 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

$\rightarrow$  para  $y = -6 \rightarrow x = 3 - 6 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, -6)$   
 $\rightarrow$  para  $y = 3 \rightarrow x = 3 + 3 \rightarrow x = 6 \rightarrow (6, 3)$   
 $S = \{(-3, -6); (6, 3)\}$

$$c) \begin{cases} x = 3y \\ 3x^2 + y^2 = 28 & \rightarrow 3 \cdot (3y)^2 + y^2 = 28 \end{cases}$$

$$3 \cdot 9y^2 + y^2 = 28$$

$$27y^2 + y^2 = 28$$

$$28 \cdot y^2 = 28$$

$$y^2 = 1 \rightarrow y = \pm\sqrt{1} \rightarrow y = \pm 1$$

$\rightarrow$  para  $y = -1 \rightarrow x = 3 \cdot (-1) \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, -1)$   
 $\rightarrow$  para  $y = 1 \rightarrow x = 3 \cdot 1 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 1)$   
 $S = \{(-3, -1); (3, 1)\}$

$$d) \begin{cases} x - y = 9 & \rightarrow x = 9 + y \\ x \cdot y = -14 & \rightarrow (9 + y) \cdot y = -14 \end{cases}$$

$$9y + y^2 = -14 \rightarrow y^2 + 9y + 14 = 0$$

$$\Delta = 81 - 56 \rightarrow \Delta = 25 = (5)^2$$

$$y_1 = \frac{-9 - 5}{2} \rightarrow y_1 = -7$$

$$y_2 = \frac{-9 + 5}{2} \rightarrow y_2 = -2$$

$$y = \frac{-9 \pm 5}{2} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -7 \\ y_2 = -2 \end{cases}$$

$\rightarrow$  para  $y = -7 \rightarrow x = 9 - 7 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, -7)$   
 $\rightarrow$  para  $y = -2 \rightarrow x = 9 - 2 \rightarrow x = 7 \rightarrow (7, -2)$   
 $S = \{(2, -7); (7, -2)\}$

$$e) \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 = 45 & \rightarrow (2y)^2 + y^2 = 45 \end{cases}$$

$$4y^2 + y^2 = 45$$

$$5 \cdot y^2 = 45$$

$$y^2 = 9 \rightarrow y = \pm\sqrt{9} \rightarrow y = \pm 3$$

$\rightarrow$  para  $y = -3 \rightarrow x = 2 \cdot (-3) \rightarrow x = -6 \rightarrow (-6, -3)$   
 $\rightarrow$  para  $y = 3 \rightarrow x = 2 \cdot 3 \rightarrow x = 6 \rightarrow (6, 3)$   
 $S = \{(-6, -3); (6, 3)\}$

Determine a solução dos problemas a seguir.

**2.** Qual é o número que somado a seu quadrado resulta 56?

$$x + x^2 = 56 \rightarrow x^2 + x - 56 = 0$$

$$\Delta = 1 + 224 \rightarrow \Delta = 225 = (15)^2$$

$$x = \frac{-1 \pm 15}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - 15}{2} \rightarrow x_1 = -8 \\ x_2 = \frac{-1 + 15}{2} \rightarrow x_2 = 7 \end{cases}$$

O número pode ser  $-8$  ou  $7$ .

**3.** Um número ao quadrado mais o dobro desse número é igual a 35. Qual é esse número?

$$x^2 + 2x = 35 \rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$\Delta = 4 + 140 \rightarrow \Delta = 144 = (12)^2$$

$$x = \frac{-2 \pm 12}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 - 12}{2} \rightarrow x_1 = -7 \\ x_2 = \frac{-2 + 12}{2} \rightarrow x_2 = 5 \end{cases}$$

O número pode ser  $-7$  ou  $5$ .

**4.** O quadrado de um número menos o seu triplo é igual a 40. Qual é esse número?

$$x^2 - 3x = 40 \rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$\Delta = 9 + 160 \rightarrow \Delta = 169 = (13)^2$$

$$x = \frac{3 \pm 13}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3 - 13}{2} \rightarrow x_1 = -5 \\ x_2 = \frac{3 + 13}{2} \rightarrow x_2 = 8 \end{cases}$$

O número pode ser -5 ou 8.

**5.** A soma das idades de um pai e de um de seus filhos é 40 anos, e a diferença dos quadrados das idades é 800. Quais são as idades?

Idade do pai:  $x$

Idade do filho:  $y$

$$\text{Logo } \begin{cases} x + y = 40 \rightarrow x = 40 - y \\ x^2 - y^2 = 800 \rightarrow (40 - y)^2 - y^2 = 800 \end{cases}$$

$$1600 - 80y + y^2 - y^2 = 800$$

$$-80y = -800 \rightarrow y = 10$$

$$x = 40 - 10 \rightarrow x = 30$$

O pai tem 30 anos e o filho, 10 anos.

**6.** Quantos lados tem o polígono que possui 5 diagonais?

Sugestão: usar  $d = \frac{(n-3) \cdot n}{2}$ , onde

$d = n^\circ$  de diagonais

$n = n^\circ$  de lados

$$5 = \frac{(n-3) \cdot n}{2} \rightarrow 10 = n^2 - 3n$$

$$-n^2 + 3n + 10 = 0$$

$$n^2 - 3n - 10 = 0$$

$$\Delta = 9 + 40 \rightarrow \Delta = 49 = (7)^2$$

$$n = \frac{3 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = \frac{3 - 7}{2} \rightarrow n_1 = -2 \text{ lados (não convém)} \\ n_2 = \frac{3 + 7}{2} \rightarrow n_2 = 5 \text{ lados} \end{cases}$$

O polígono que possui 5 diagonais tem 5 lados.



## CAPÍTULO 6 – FUNÇÕES

### 1. Produto cartesiano



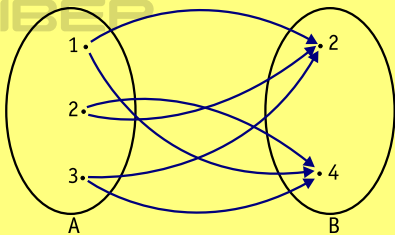
Dados os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 4\}$ , por exemplo, chamamos de **produto cartesiano** de A por B o novo conjunto formado por todos os pares ordenados  $(x, y)$ , em que  $x$  é um elemento de A e  $y$  é um elemento de B, tomados um a um.

$A \times B$  (lê-se: A cartesiano B) corresponde ao conjunto formado pelos seguintes pares ordenados:  $(1, 2)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(3, 2)$  e  $(3, 4)$ .

$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$

**Nota:** Um par ordenado consiste de dois elementos  $x$  e  $y$ , por exemplo, tomados numa determinada ordem:  $x$  é o 1º elemento e, conseqüentemente,  $y$  é o 2º. Sua designação é  $(x, y)$ .

Representando esse produto cartesiano com um diagrama de flechas:



Observe que de cada elemento de A parte uma flecha em direção a um elemento de B.

1. Sendo  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{1, 5\}$  e  $C = \{2, 3, 5\}$ ,

efetue:

a)  $A \times B$

$A \times B = \{(1, 1); (1, 5); (3, 1); (3, 5)\}$

b)  $B \times A$

$B \times A = \{(1, 1); (1, 3); (5, 1); (5, 3)\}$

c)  $A \times C$

$A \times C = \{(1, 2); (1, 3); (1, 5); (3, 2); (3, 3); (3, 5)\}$

d)  $B \times C$

$B \times C = \{(1, 2); (1, 3); (1, 5); (5, 2); (5, 3); (5, 5)\}$

e)  $C \times A$

$C \times A = \{(2, 1); (2, 3); (3, 1); (3, 3); (5, 1); (5, 3)\}$

f)  $C \times B$

$C \times B = \{(2, 1); (2, 5); (3, 1); (3, 5); (5, 1); (5, 5)\}$

2. Dados:  $A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (1, 7)\}$  e

$C \times D = \{(1, 1), (1, 4), (3, 1), (3, 4)\}$ ,

determine os conjuntos:

a) A

b) B

c) C

d) D

## 2. Relação binária



Considerando dois conjuntos  $A$  e  $B$ , não vazios, chamamos de **relação binária** ( $R$ ) de  $A$  em  $B$  qualquer subconjunto do produto cartesiano de  $A$  por  $B$ .

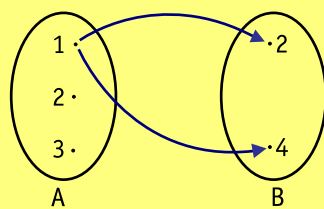
Exemplo:

Considere os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 4\}$ .

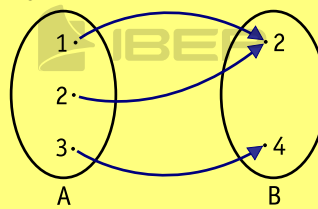
Temos  $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4)\}$ .

Vamos considerar alguns subconjuntos de  $A \times B$ :

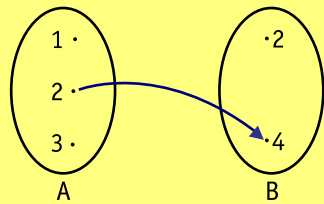
$$R_1 = \{(1, 2), (1, 4)\}$$



$$R_3 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4)\}$$



$$R_2 = \{(2, 4)\}$$



Note que os subconjuntos apresentados são relações binárias de  $A$  em  $B$ .

**3.** Dado o produto cartesiano  $A \times B$ , assinale as alternativas que apresentam relações binárias de  $A$  em  $B$ .

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5)\}$$

- a)  $R = \{(1, 3), (2, 5)\}$
- b)  $R = \{(1, 3), (4, 1), (1, 5)\}$
- c)  $R = \{(2, 3), (2, 4), (1, 3)\}$
- d)  $R = \{(1, 3), (2, 3), (5, 2)\}$

**4.** Dadas todas as relações binárias de  $A$  em  $B$ , apresente os conjuntos  $A$  e  $B$ .

$$R = \{(2, 3), (2, 5), (4, 3), (4, 5), (6, 3), (6, 5), (8, 3), (8, 5)\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$B = \{3, 5\}$$

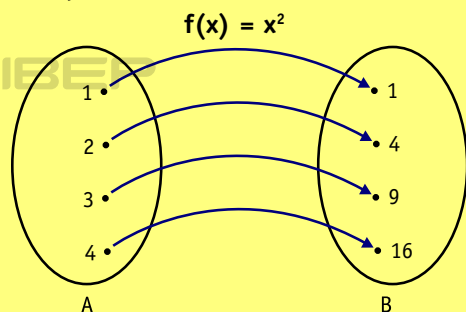


### 3. Função



Dados dois conjuntos A e B, **função** é uma lei que faz corresponder a cada elemento x do conjunto A um único elemento y do conjunto B.

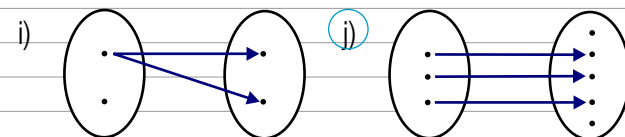
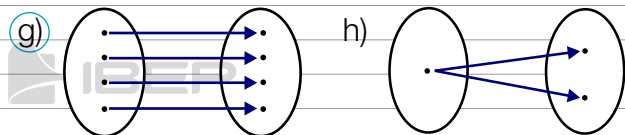
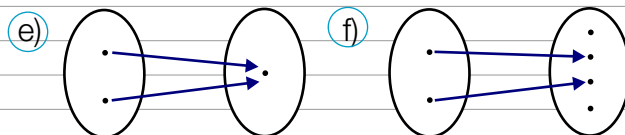
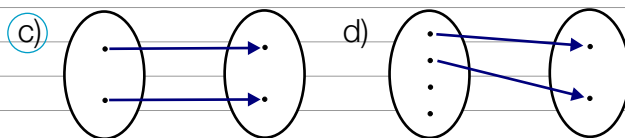
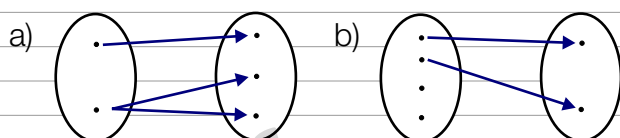
Considere, por exemplo, o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , que representa as medidas dos lados de quadrados, e o conjunto  $B = \{1, 4, 9, 16\}$ , que representa as áreas desses quadrados. Neste diagrama de flechas, observe a função que leva os elementos de A ao seu quadrado em B.



Para todo elemento de A temos um único correspondente em B. Podemos então afirmar que temos uma função de A em B (indica-se  $f: A \rightarrow B$ ).

- O conjunto A é chamado de **domínio** da função, e o conjunto B de **contradomínio**.
- **x** e **y** são as variáveis, independente e dependente, respectivamente.
- Representa-se uma função por  $f(x)$ .

5. Dados os diagramas, assinale as alternativas em que esses diagramas representam função.



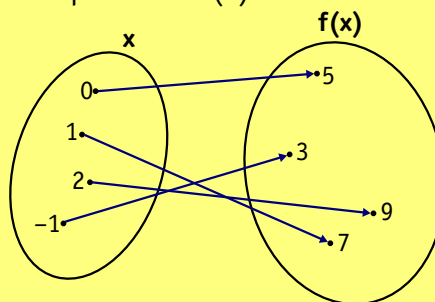
### 4. Valor numérico de uma função polinomial de R em R



Seja  $f(x) = 2x + 5$ ; por exemplo, temos:

- para  $x = 0$   
 $f(0) = 2 \cdot 0 + 5 = 5 \rightarrow f(0) = 5$ ;
- para  $x = 1$   
 $f(1) = 2 \cdot 1 + 5 = 7 \rightarrow f(1) = 7$ ;
- para  $x = 2$   
 $f(2) = 2 \cdot 2 + 5 = 9 \rightarrow f(2) = 9$ ;
- para  $x = -1$   
 $f(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3 \rightarrow f(-1) = 3$ .

No diagrama de flechas, podemos observar que para cada valor de x temos um único correspondente  $f(x)$ .



**6.** Dado  $f(x) = 3x + 7$  ( $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), calcule.

a)  $f(0)$

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 7$$

$$f(0) = 0 + 7$$

$$f(0) = 7$$

b)  $f(1)$

$$f(1) = 3 \cdot 1 + 7$$

$$f(1) = 3 + 7$$

$$f(1) = 10$$

c)  $f(2)$

$$f(2) = 3 \cdot 2 + 7$$

$$f(2) = 6 + 7$$

$$f(2) = 13$$

d)  $f(3)$

$$f(3) = 3 \cdot 3 + 7$$

$$f(3) = 9 + 7$$

$$f(3) = 16$$

e)  $f(-1)$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1) + 7$$

$$f(-1) = -3 + 7$$

$$f(-1) = 4$$

f)  $f(5)$

$$f(5) = 3 \cdot 5 + 7$$

$$f(5) = 15 + 7$$

$$f(5) = 22$$

**7.** Dado  $f(x) = x^2 + 7x + 10$ , calcule.

a)  $f(0)$

$$f(0) = 0^2 + 7 \cdot 0 + 10$$

$$f(0) = 0 + 0 + 10$$

$$f(0) = 10$$

b)  $f(1)$

$$f(1) = 1^2 + 7 \cdot 1 + 10$$

$$f(1) = 1 + 7 + 10$$

$$f(1) = 18$$

c)  $f(2)$

$$f(2) = 2^2 + 7 \cdot 2 + 10$$

$$f(2) = 4 + 14 + 10$$

$$f(2) = 28$$

d)  $f(-1)$

$$f(-1) = (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 10$$

$$f(-1) = 1 - 7 + 10$$

$$f(-1) = 4$$

e)  $f(-3)$

$$f(-3) = (-3)^2 + 7 \cdot (-3) + 10$$

$$f(-3) = 9 - 21 + 10$$

$$f(-3) = -2$$

f)  $f(-5)$

$$f(-5) = (-5)^2 + 7 \cdot (-5) + 10$$

$$f(-5) = 25 - 35 + 10$$

$$f(-5) = 0$$

**8.** Sendo  $f(x) = x^2 + 4$ ,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , calcule  $x$  para que se tenha:

a)  $f(x) = 0$

$$x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

b)  $f(x) = 5$

$$x^2 + 4 = 5$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm \sqrt{1} \rightarrow x = \pm 1$$

c)  $f(x) = 12$

$$x^2 + 4 = 12$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm \sqrt{8} \rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

d)  $f(x) = 21$

$$x^2 + 4 = 21$$

$$x^2 = 17$$

$$x = \pm \sqrt{17}$$

## 5. Função polinomial do 1º grau

### Função do 1º grau

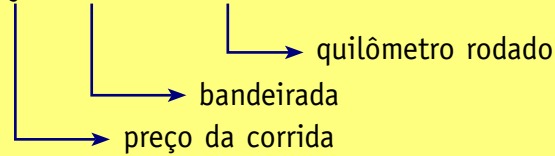


Uma função do tipo  $f(x) = ax + b$ , com  $a$  e  $b$  reais e  $a \neq 0$ , definida de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , é chamada **função do 1º grau**.

Exemplo: Uma corrida de táxi custa o preço da bandeirada mais um determinado preço por quilômetro rodado.

Se a bandeirada custa R\$ 3,20 e o quilômetro rodado custa R\$ 1,50, veja a função que expressa essa situação.

$$y = 3,20 + 1,50x$$



### Gráfico de uma função polinomial do 1º grau



Vamos construir o gráfico da função  $y = 2x + 1$ .

Inicialmente, atribuímos valores reais a  $x$ , e obtemos os valores correspondentes de  $y$ .

$$y = 2x + 1$$

- para  $x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 \rightarrow y = 1$
- para  $x = 1 \rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 \rightarrow y = 3$
- para  $x = 2 \rightarrow y = 2 \cdot 2 + 1 \rightarrow y = 5$
- para  $x = 3 \rightarrow y = 2 \cdot 3 + 1 \rightarrow y = 7$

(x, y)

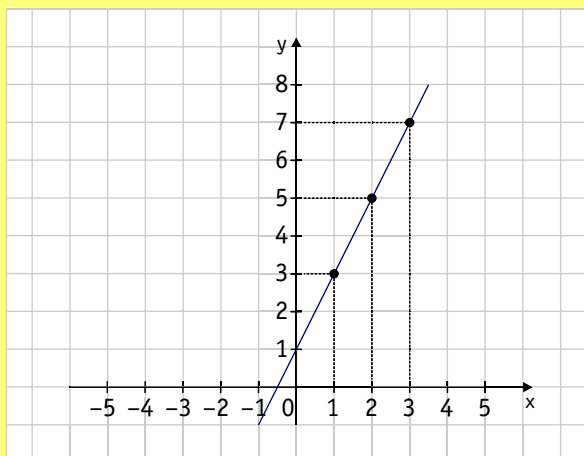
(0, 1)

(1, 3)

(2, 5)

(3, 7)

Em seguida, dispomos os pares ordenados  $(x, y)$  no plano cartesiano e ligamos os pontos correspondentes de modo a determinar a reta da equação  $y = 2x + 1$ .



A representação gráfica de uma função polinomial do 1º grau é sempre uma **reta**. Assim, basta obtermos dois pontos  $(x, y)$  para determiná-la.

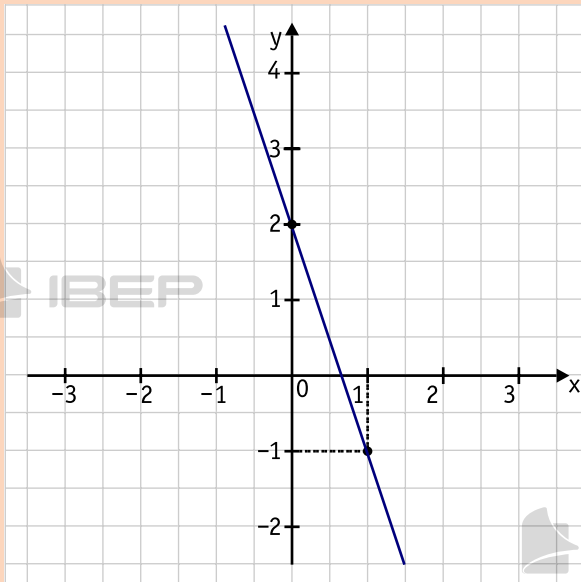


Exemplo:

Vamos construir o gráfico das seguintes funções polinomiais do 1º grau.

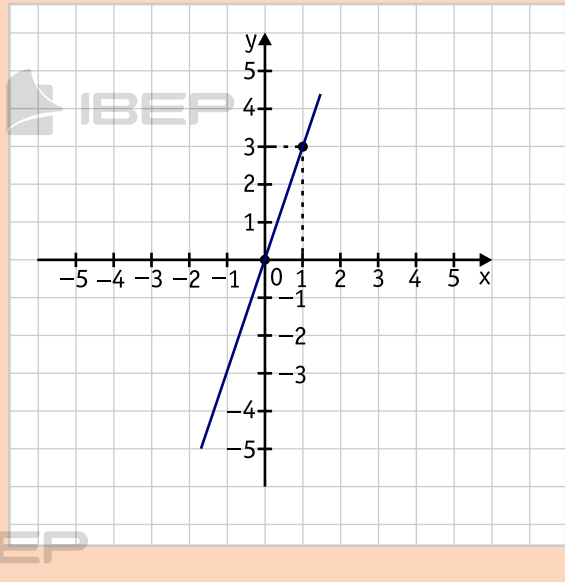
a)  $y = -3x + 2$

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
1	-1	(1, -1)



b)  $y = 3x$

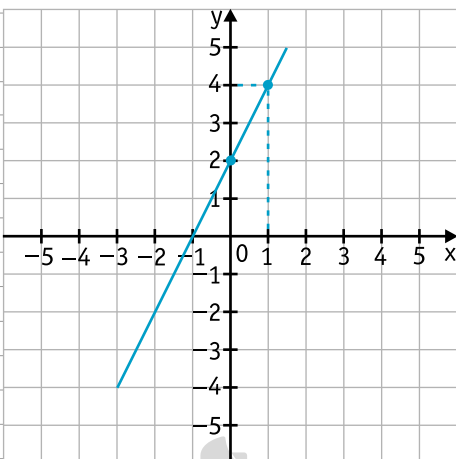
x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	3	(1, 3)



9. Construa o gráfico das funções polinomiais do 1º grau.

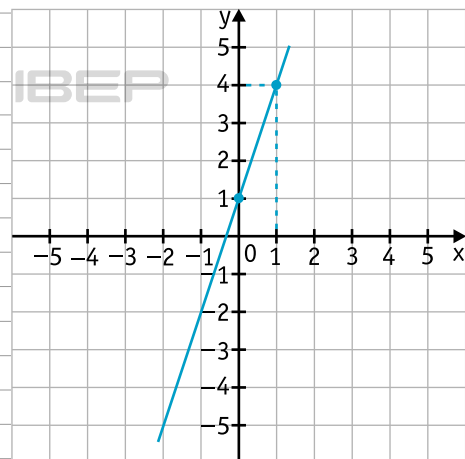
a)  $y = 2x + 2$

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
1	4	(1, 4)



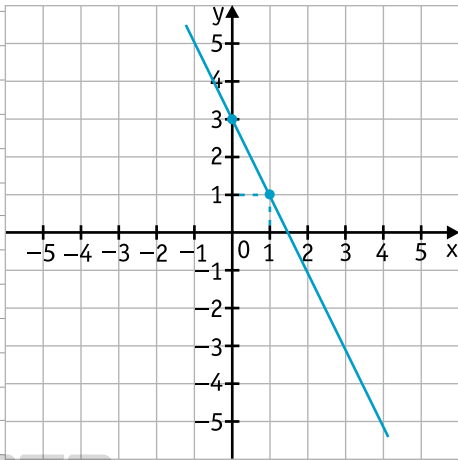
b)  $y = 3x + 1$

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
1	4	(1, 4)



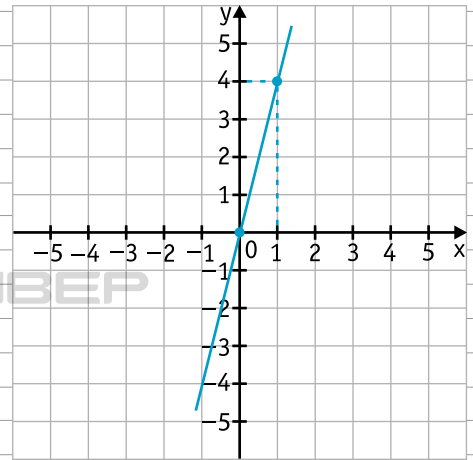
c)  $y = -2x + 3$

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
1	1	(1, 1)



d)  $y = 4x$

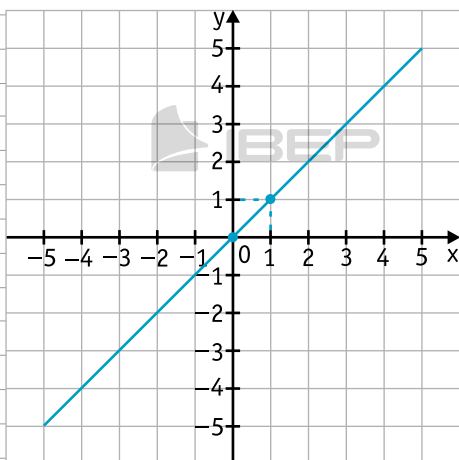
x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	4	(1, 4)



**10.** Construa o gráfico das funções polinomiais do 1º grau.

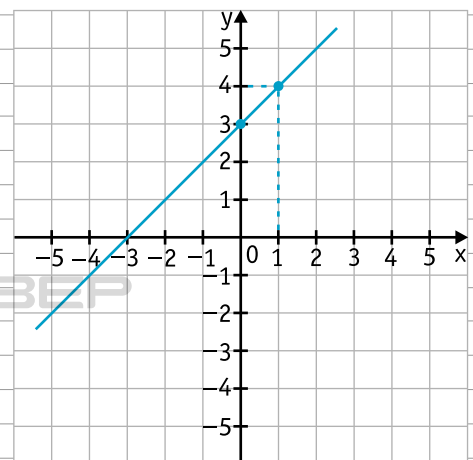
a)  $y = x$

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)



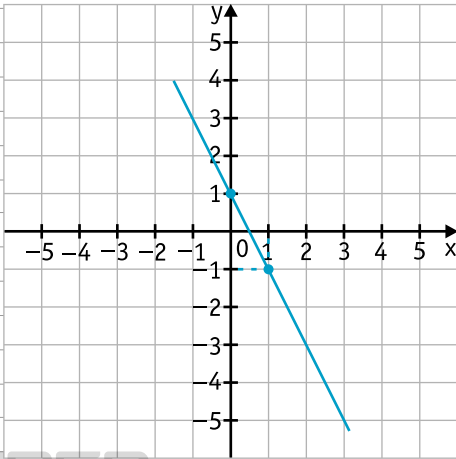
b)  $y = x + 3$

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
1	4	(1, 4)



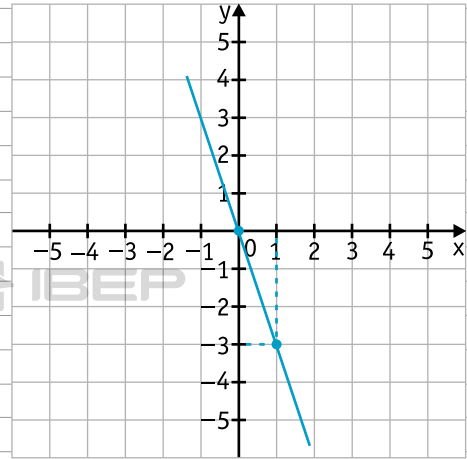
c)  $y = -2x + 1$

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
1	-1	(1, -1)



d)  $y = -3x$

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	-3	(1, -3)



## 6. Função quadrática



Toda função polinomial do tipo  $y = ax^2 + bx + c$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais e  $a \neq 0$ , definida de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , é chamada de **função quadrática**.

### Representação gráfica de uma função quadrática



A curva que representa o gráfico de uma função quadrática é denominada **parábola**.

A representação gráfica de funções do tipo  $y = ax^2 + bx + c$ , com  $a$ ,  $b$  e  $c$  reais e  $a \neq 0$ , depende do valor de  $\Delta$ , como mostra o quadro.

$y = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$	$a > 0$ (a positivo)	$a < 0$ (a negativo)
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

Observe que para  $\Delta < 0$ , a parábola não corta o eixo  $x$ . Isso significa que a função não apresenta raízes reais.

### Exemplos

1) Vamos construir o gráfico da função quadrática  $y = x^2 + x - 6$ .

- Atribuimos valores reais para  $x$  e obtemos os valores correspondentes de  $y$ .

$$y = x^2 + x - 6 \quad (x, y)$$

- para  $x = 2$

$$y = 2^2 + 2 - 6 \rightarrow y = 0 \quad (2, 0)$$

- para  $x = 1$

$$y = 1^2 + 1 - 6 \rightarrow y = -4 \quad (1, -4)$$

- para  $x = 0$

$$y = 0 + 0 - 6 \rightarrow y = -6 \quad (0, -6)$$

- para  $x = -1$

$$y = (-1)^2 + (-1) - 6 \rightarrow y = -6 \quad (-1, -6)$$

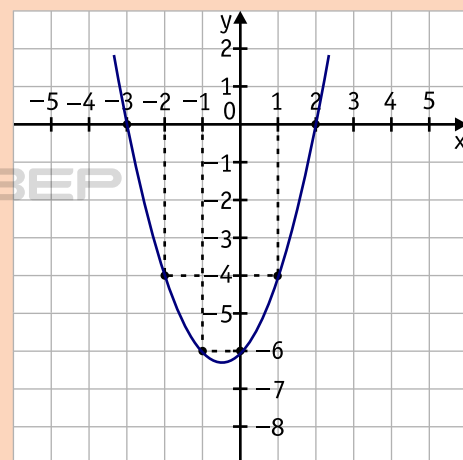
- para  $x = -2$

$$y = (-2)^2 + (-2) - 6 \rightarrow y = -4 \quad (-2, -4)$$

- para  $x = -3$

$$y = (-3)^2 + (-3) - 6 \rightarrow y = 0 \quad (-3, 0)$$

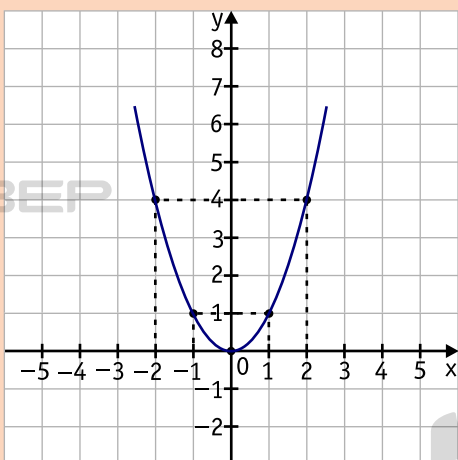
- Representamos os pares ordenados  $(x, y)$  no plano cartesiano e traçamos a **parábola** que passa por esses pontos.



2) Vamos construir o gráfico das funções quadráticas.

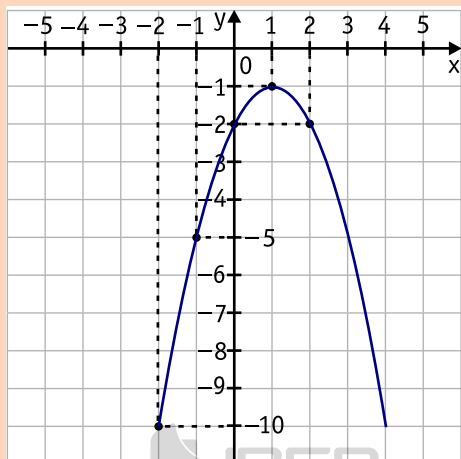
a)  $y = x^2$

x	y	(x, y)
-2	4	(-2, 4)
-1	1	(-1, 1)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)



b)  $y = -x^2 + 2x - 2$

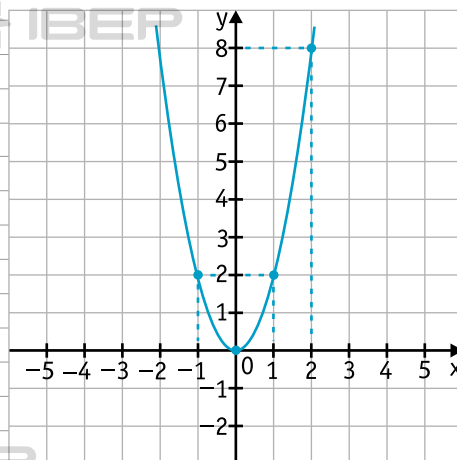
x	y	(x, y)
-2	-10	(-2, -10)
-1	-5	(-1, -5)
0	-2	(0, -2)
1	-1	(1, -1)
2	-2	(2, -2)



11. Complete a tabela e construa o gráfico das funções quadráticas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ .

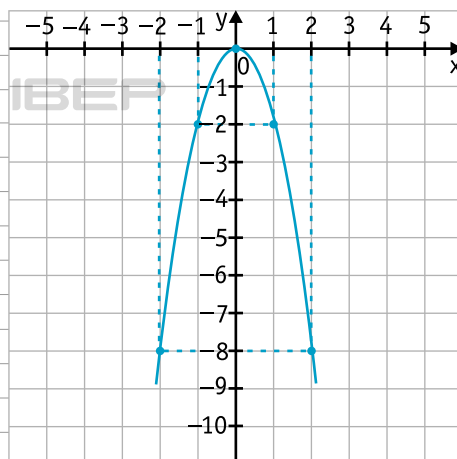
a)  $y = 2x^2$

x	y	(x, y)
-1	2	(-1, 2)
0	0	(0, 0)
1	2	(1, 2)
2	8	(2, 8)



b)  $y = -2x^2$

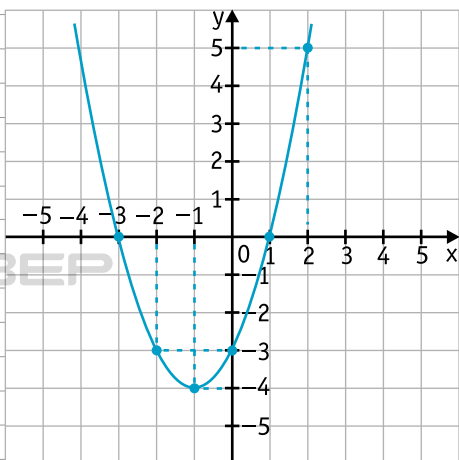
x	y	(x, y)
-1	-2	(-1, -2)
0	0	(0, 0)
1	-2	(1, -2)
2	-8	(2, -8)
-2	-8	(-2, -8)





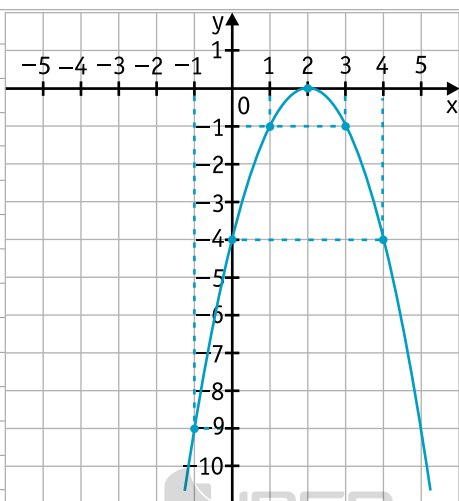
c)  $y = x^2 + 2x - 3$

x	y	(x, y)
-3	0	(-3, 0)
-2	-3	(-2, -3)
-1	-4	(-1, -4)
0	-3	(0, -3)
1	0	(1, 0)
2	5	(2, 5)



d)  $y = -x^2 + 4x - 4$

x	y	(x, y)
-1	-9	(-1, -9)
0	-4	(0, -4)
1	-1	(1, -1)
2	0	(2, 0)
3	-1	(3, -1)
4	-4	(4, -4)



## Concavidade de uma função quadrática



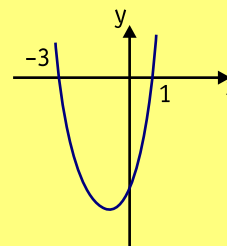
Na representação gráfica da função quadrática temos:

- Se  $a > 0$ , a concavidade da parábola está voltada para cima.
- Se  $a < 0$ , a concavidade da parábola está voltada para baixo.

## Raízes de uma função quadrática



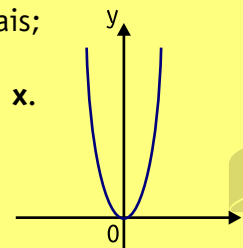
- Se  $\Delta > 0$ , a equação admite duas raízes reais e diferentes. Então, a parábola **corta o eixo x** em dois pontos distintos.



Exemplo:

$\Delta > 0$  e  $a > 0$

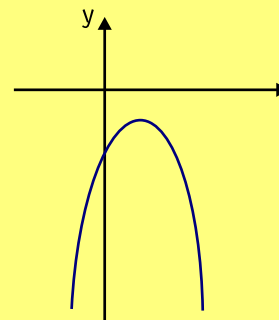
- Se  $\Delta = 0$ , a equação admite duas raízes reais e iguais; então a parábola **tangencia o eixo x**.



Exemplo:

$\Delta = 0$  e  $a > 0$

- Se  $\Delta < 0$ , a equação não admite raiz real; então a parábola **não tem ponto em comum com o eixo x**.

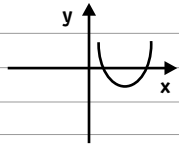


Exemplo:

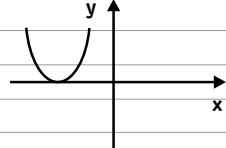
$\Delta < 0$  e  $a < 0$

**12.** Observe os gráficos e preencha os espaços vazios com os símbolos  $>$ ,  $<$  ou  $=$ , tornando verdadeiras as relações entre os valores de  $a$  e  $\Delta$  e os gráficos.

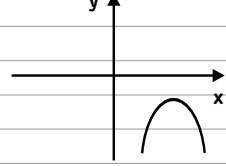
a)  $a > 0$   
 $\Delta > 0$



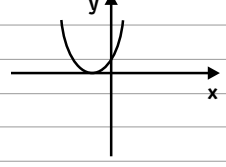
b)  $a > 0$   
 $\Delta = 0$



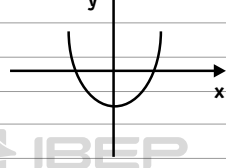
c)  $a < 0$   
 $\Delta < 0$



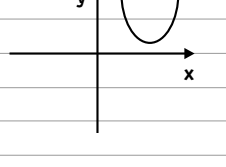
d)  $a > 0$   
 $\Delta = 0$



e)  $a > 0$   
 $\Delta > 0$



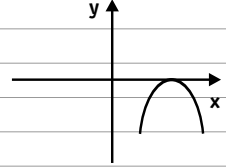
f)  $a > 0$   
 $\Delta < 0$



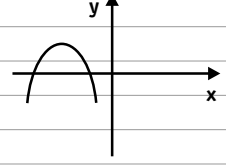
g)  $a < 0$   
 $\Delta > 0$



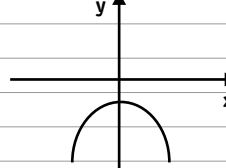
h)  $a < 0$   
 $\Delta = 0$



i)  $a < 0$   
 $\Delta > 0$



j)  $a < 0$   
 $\Delta < 0$





# CAPÍTULO 7 – INEQUAÇÕES DO 2º GRAU

## Resoluções de inequações do 2º grau



Resolver uma inequação do 2º grau do tipo  $ax^2 + bx + c \leq 0$  ou  $ax^2 + bx + c \geq 0$  é determinar o conjunto de valores de  $x$  que tornam a função verdadeira.

### Exemplos

1) Vamos resolver a inequação

$$x^2 + 3x + 2 > 0.$$

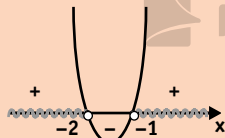
Resolver essa inequação é determinar o conjunto de valores de  $x$  que tornam a função  $x^2 + 3x + 2$  positiva. Esse conjunto de valores pode ser determinado por meio do gráfico da equação  $x^2 + 3x + 2 = 0$ .

$a = 1$  ( $a > 0$ )  $\rightarrow$  concavidade para cima

$\Delta = 1$  ( $\Delta > 0$ )  $\rightarrow$  corta o eixo  $x$

$$x_1 = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$



Observando atentamente o gráfico, verificamos que, para quaisquer valores de  $x$  menores que  $-2$  ou maiores que  $-1$ , a função é positiva.

Então,  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -1\}$ .

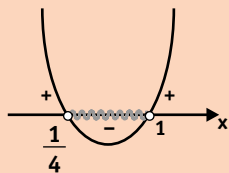
2)  $4x^2 - 5x + 1 < 0$

$a = 4$  ( $a > 0$ )  $\rightarrow$  concavidade para cima

$\Delta = 9$  ( $\Delta > 0$ )  $\rightarrow$  corta o eixo  $x$

$$x_1 = \frac{5 + 3}{8} = 1$$

$$x_2 = \frac{5 - 3}{8} = \frac{1}{4}$$



Os valores de  $x$  maiores que  $\frac{1}{4}$  e menores que  $1$  (entre  $\frac{1}{4}$  e  $1$ ) resolvem a inequação.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < 1\}$

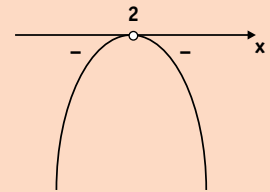
3)  $-x^2 + 4x - 4 > 0$

$a = -1$  ( $a < 0$ )  $\rightarrow$  concavidade para baixo

$\Delta = 0$   $\rightarrow$  tangencia o eixo  $x$

$$x_1 = x_2 = \frac{-4 \pm 0}{-2} = 2$$

Nenhum valor de  $x$  torna  $-x^2 + 4x - 4 > 0$ .  
Então,  $S = \emptyset$ .



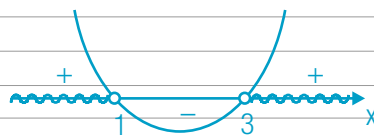
Determine o conjunto verdade das inequações do 2º grau em  $\mathbb{R}$ .

a)  $x^2 - 4x + 3 > 0$

$a = 1 > 0$  (para cima)

$\Delta = 4 > 0$  (corta o eixo  $x$ )

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$



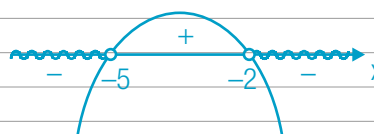
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

b)  $-x^2 - 7x - 10 < 0$

$a = -1 < 0$  (para baixo)

$\Delta = 9 > 0$  (corta o eixo  $x$ )

$$x = \frac{7 \pm 3}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$



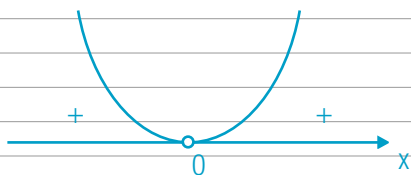
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > -2\}$

c)  $3x^2 < 0$

$a = 3 > 0$  (para cima)

$\Delta = 0$  (tangencia o eixo x)

$x = 0$



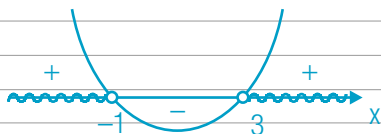
$S = \emptyset$

d)  $x^2 - 2x - 3 > 0$

$a = 1 > 0$  (para cima)

$\Delta = 16 > 0$  (corta o eixo x)

$x = \frac{2 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$



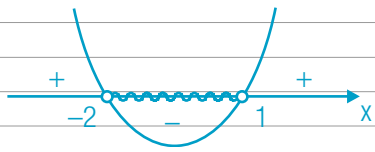
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 3\}$

e)  $x^2 + x - 2 < 0$

$a = 1 > 0$  (para cima)

$\Delta = 9 > 0$  (corta o eixo x)

$x = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$



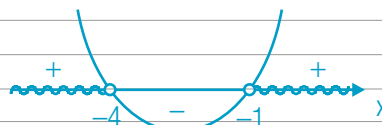
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}$

f)  $x^2 + 5x + 4 > 0$

$a = 1 > 0$  (para cima)

$\Delta = 9 > 0$  (corta o eixo x)

$x = \frac{-5 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > -1\}$

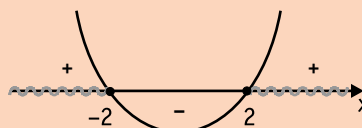
g)  $x^2 - 4 \geq 0$

$a = 1$  (concavidade para cima)

$\Delta = 16$  (corta o eixo x)

$x = \frac{-0 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

Como a inequação apresenta desigualdade e igualdade, tem-se:



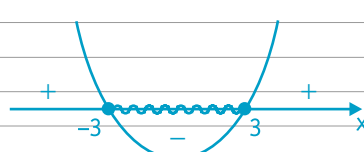
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$

h)  $x^2 - 9 \leq 0$

$a = 1 > 0$  (para cima)

$\Delta = 36 > 0$  (corta o eixo x)

$x = \frac{-0 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

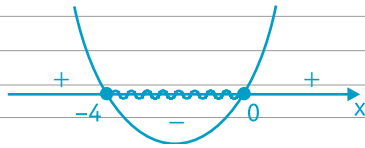


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

i)  $x^2 + 4x \leq 0$   
 $a = 1 > 0$  (para cima)

$\Delta = 16 > 0$  (corta o eixo x)

$x(x + 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \end{cases}$

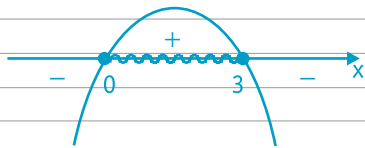


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 0\}$

j)  $-x^2 + 3x \geq 0$   
 $a = -1 < 0$  (para baixo)

$\Delta = 9 > 0$  (corta o eixo x)

$x(-x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

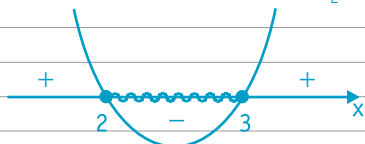


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$

k)  $x^2 - 5x + 6 \leq 0$   
 $a = 1 > 0$  (para cima)

$\Delta = 1 > 0$  (corta o eixo x)

$x = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

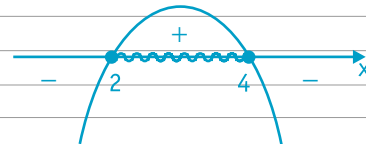


$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$

l)  $-x^2 + 6x - 8 \geq 0$   
 $a = -1 < 0$  (para baixo)

$\Delta = 4 > 0$  (corta o eixo x)

$x = \frac{-6 \pm 2}{-2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$



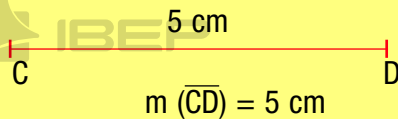
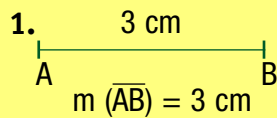
## CAPÍTULO 8 – SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

### 1. Razão entre segmentos



**Razão entre dois segmentos** é a razão entre suas medidas, tomadas numa mesma unidade.

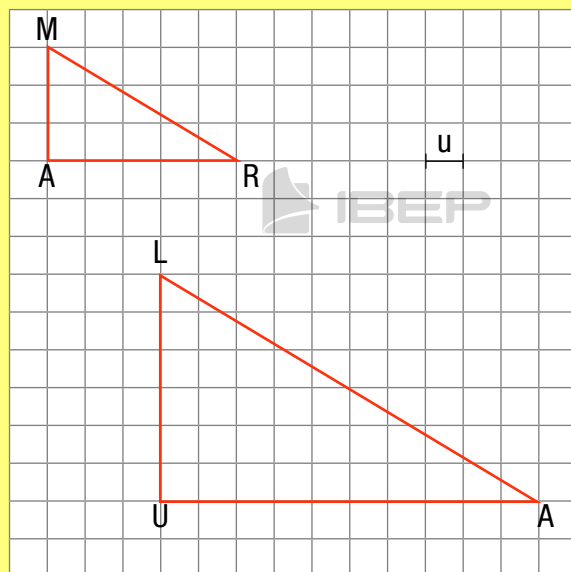
**Exemplos:**



A razão dos segmentos  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  é  $\frac{3}{5}$ .

$$\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$$

2. O triângulo LUA é ampliação do triângulo MAR. Qual é a razão entre  $\overline{MA}$  e  $\overline{LU}$  nessa ordem?



$$\frac{MA}{LU} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

1. Dados:  $AB = 3$  cm,  $CD = 4$  cm,  $EF = 5$  cm e  $GH = 2$  cm, determine:

a)  $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$

e)  $\frac{AB}{GH} = \frac{3}{2}$

b)  $\frac{GH}{CD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$


f)  $\frac{CD}{AB} = \frac{4}{3}$

c)  $\frac{GH}{EF} = \frac{2}{5}$

g)  $\frac{CD}{EF} = \frac{4}{5}$

d)  $\frac{EF}{CD} = \frac{5}{4}$

h)  $\frac{GH}{AB} = \frac{2}{3}$

2. Observe a figura  A B C D, onde  $m(\overline{AB}) = m(\overline{BC}) = m(\overline{CD})$ , e determine as razões:

a)  $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{1}$

e)  $\frac{AB}{BD} = \frac{1}{2}$

b)  $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{1}$

f)  $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

c)  $\frac{BD}{CD} = \frac{2}{1}$

g)  $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{2}$

d)  $\frac{CD}{AD} = \frac{1}{3}$

h)  $\frac{BC}{CD} = \frac{1}{1}$

3. Sendo AB, BC, CD e DE, nessa ordem, segmentos proporcionais, determine o valor de x nos seguintes casos:

Exemplo: AB = x; BC = 3 cm;

CD = 10 cm; DE = 6 cm

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE} \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{10}{6} \rightarrow$$

$$\rightarrow 6x = 30 \rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

a) AB = 4 cm; BC = x; CD = 2 cm; DE = 4 cm

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{2}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x = 16 \rightarrow x = 8 \text{ cm}$$

b) AB = 9 cm; BC = 12 cm; CD = x;

DE = 4 cm

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE} \rightarrow \frac{9}{12} = \frac{x}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 12x = 36 \rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

c) AB = 3 cm; BC = 6 cm; CD = 6 cm; DE = x

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{6}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = 12 \text{ cm}$$

d) AB = x; BC = 8 cm; CD = 2 cm; DE = x

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE} \rightarrow \frac{x}{8} = \frac{2}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm \sqrt{16}$$

$$\rightarrow x = \pm 4 \text{ (-4 não convém)} \rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

e) AB = 6 cm; BC = x; CD = 2x; DE = 3 cm

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE} \rightarrow \frac{6}{x} = \frac{2x}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

## 2. Teorema de Tales

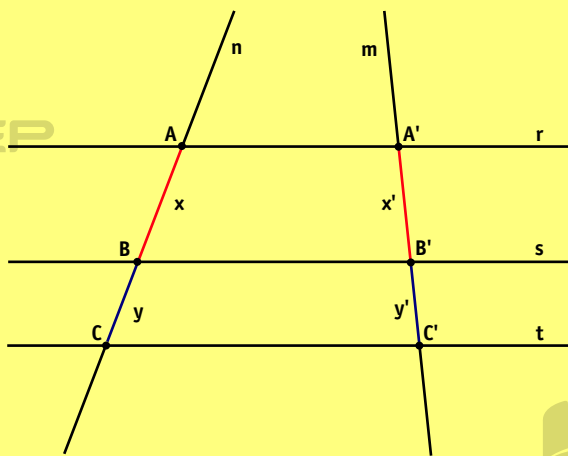


Considere um feixe de retas paralelas interceptadas por duas retas transversais. Os segmentos correspondentes determinados sobre as transversais são proporcionais.

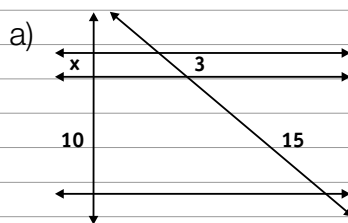
As retas m e n são transversais ao feixe de paralelas r, s e t.

Então:

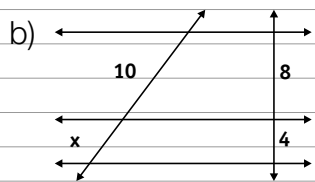
$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \text{ ou } \frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$$



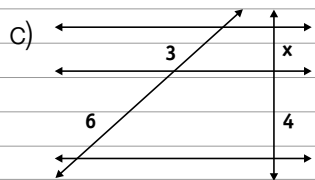
4. Determine o valor de x nos feixes de retas paralelas.



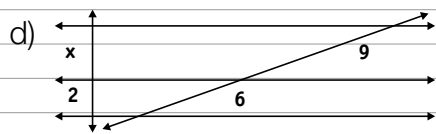
$$\frac{x}{10} = \frac{3}{15} \rightarrow 15x = 30 \rightarrow x = 2$$



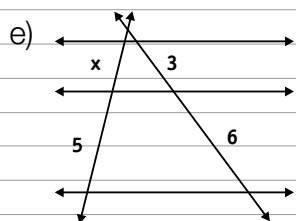
$$\frac{10}{x} = \frac{8}{4} \rightarrow 8x = 40 \rightarrow x = 5$$



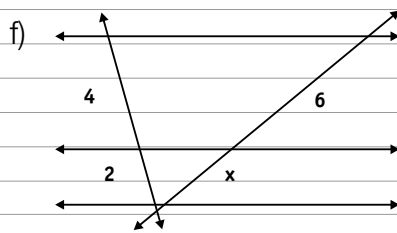
$$\frac{3}{6} = \frac{x}{4} \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$$



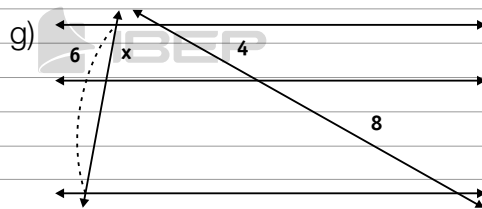
$$\frac{x}{2} = \frac{9}{6} \rightarrow 6x = 18 \rightarrow x = 3$$



$$\frac{x}{5} = \frac{3}{6} \rightarrow 6x = 15 \rightarrow x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

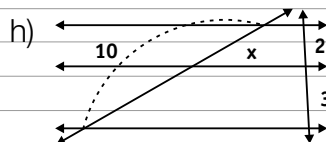


$$\frac{4}{2} = \frac{6}{x} \rightarrow 4x = 12 \rightarrow x = 3$$

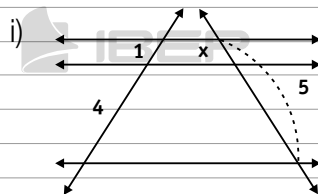


$$\frac{x}{6} = \frac{4}{12}$$

$$12x = 24 \rightarrow x = 2$$

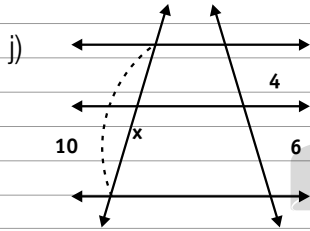


$$\frac{x}{10} = \frac{2}{5} \rightarrow 5x = 20 \rightarrow x = 4$$

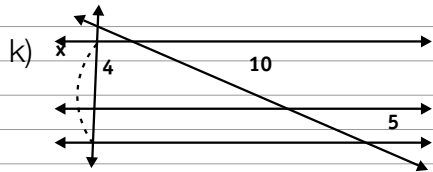


$$\frac{x}{5} = \frac{1}{5} \rightarrow x = 1$$

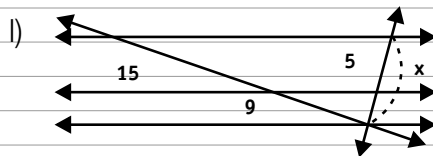




$$\frac{x}{10} = \frac{6}{10} \rightarrow x = 6$$



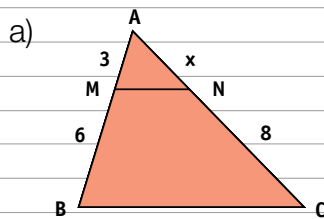
$$\frac{4}{x} = \frac{10}{15} \rightarrow x = 6$$



$$\frac{5}{x} = \frac{15}{24} \rightarrow 15x = 120 \rightarrow x = 8$$

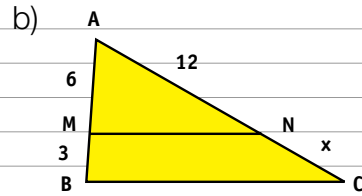
5. Determine o valor de x nos triângulos,

sendo  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ .

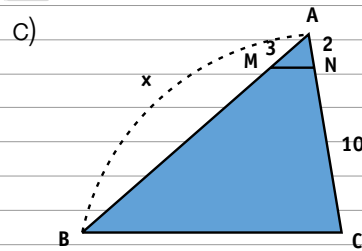


$$\frac{x}{8} = \frac{3}{6}$$

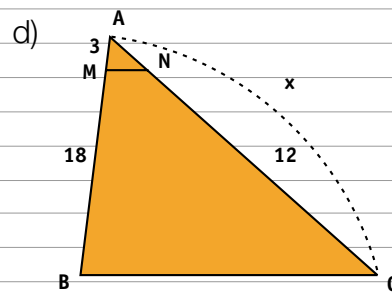
$$6x = 24 \rightarrow x = 4$$



$$\frac{12}{x} = \frac{6}{3} \quad 6x = 36 \rightarrow x = 6$$



$$\frac{x}{3} = \frac{12}{2} \quad 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

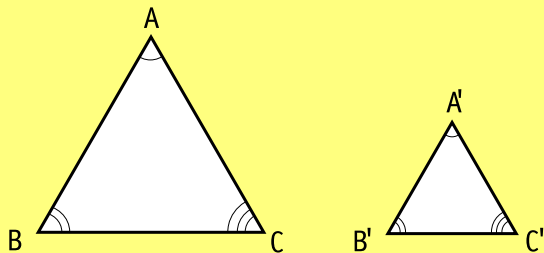


$$\frac{x}{12} = \frac{21}{18} \quad 18x = 252 \rightarrow x = 14$$

### 3. Triângulos semelhantes



Quando dois triângulos são semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Lê-se:  $\triangle ABC$  semelhante ao  $\triangle A'B'C'$ .

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

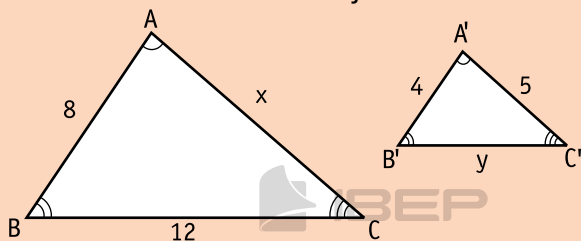
(lados correspondentes proporcionais)

$$\hat{A} \equiv \hat{A}'; \hat{B} \equiv \hat{B}'; \hat{C} \equiv \hat{C}'$$

(ângulos correspondentes congruentes)

Exemplo:

Sabendo que os triângulos são semelhantes, determine o valor de  $x$  e de  $y$ :



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{x}{5} = \frac{12}{y}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{x}{5} \rightarrow 4 \cdot x = 8 \cdot 5 \rightarrow 4x = 40 \rightarrow$$

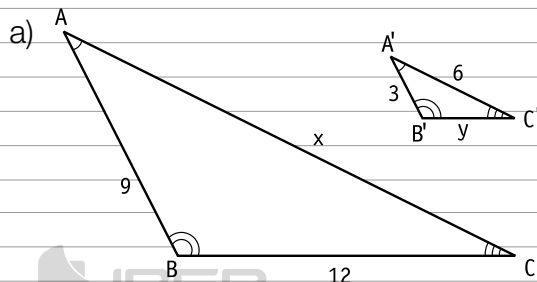
$$\rightarrow x = \frac{40}{4} \rightarrow x = 10$$

$$\frac{8}{4} = \frac{12}{y} \rightarrow 8 \cdot y = 4 \cdot 12 \rightarrow 8y = 48 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{48}{8} \rightarrow y = 6$$

6. Agora, resolva você.

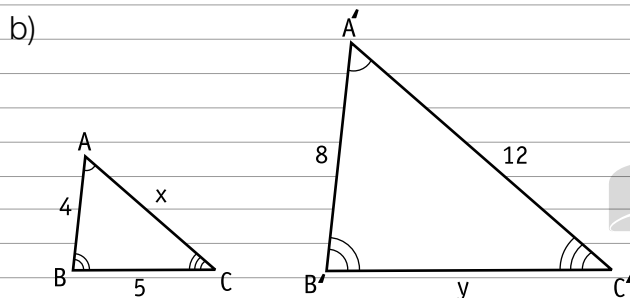
Determine o valor de  $x$  e de  $y$  nos pares de triângulos semelhantes.



$$\frac{9}{3} = \frac{x}{6} = \frac{12}{y}$$

$$\frac{9}{3} = \frac{x}{6} \rightarrow 3x = 54 \rightarrow x = 18$$

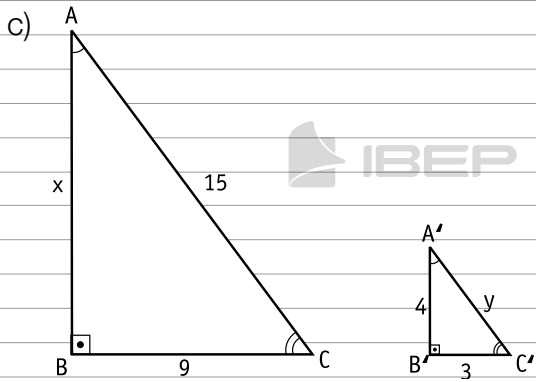
$$\frac{9}{3} = \frac{12}{y} \rightarrow 9y = 36 \rightarrow y = 4$$



$$\frac{4}{8} = \frac{x}{12} = \frac{5}{y}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{x}{12} \rightarrow 8x = 48 \rightarrow x = 6$$

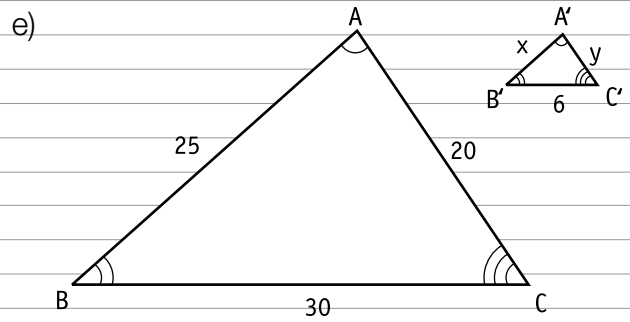
$$\frac{4}{8} = \frac{5}{y} \rightarrow 4y = 40 \rightarrow y = 10$$



$$\frac{x}{4} = \frac{15}{y} = \frac{9}{3}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{9}{3} \rightarrow 3x = 36 \rightarrow x = 12$$

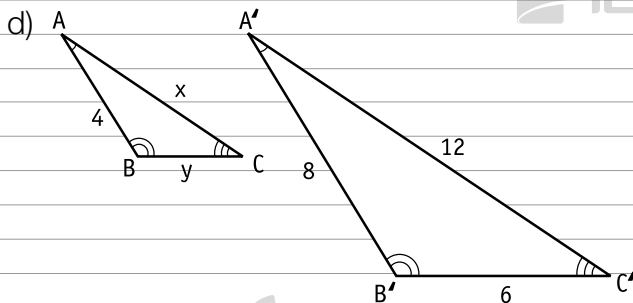
$$\frac{15}{y} = \frac{9}{3} \rightarrow 9y = 45 \rightarrow y = 5$$



$$\frac{25}{x} = \frac{20}{y} = \frac{30}{6}$$

$$\frac{25}{x} = \frac{30}{6} \rightarrow 30x = 150 \rightarrow x = 5$$

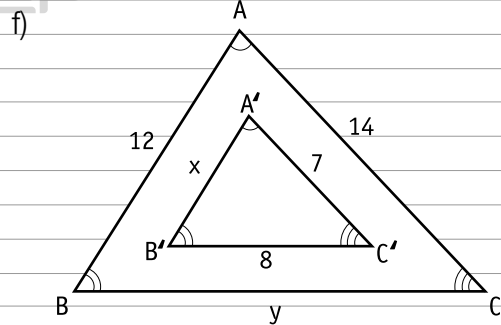
$$\frac{20}{y} = \frac{30}{6} \rightarrow 30y = 120 \rightarrow y = 4$$



$$\frac{4}{8} = \frac{x}{12} = \frac{y}{6}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{x}{12} \rightarrow 8x = 48 \rightarrow x = 6$$

$$\frac{4}{8} = \frac{y}{6} \rightarrow 8y = 24 \rightarrow y = 3$$



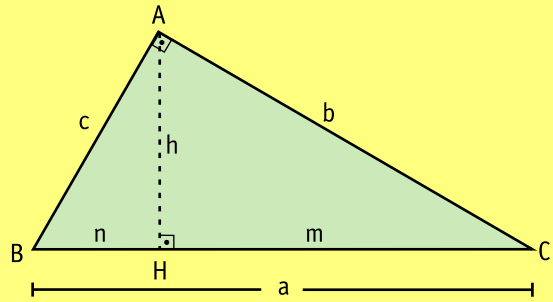
$$\frac{12}{x} = \frac{14}{7} = \frac{y}{8}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{14}{7} \rightarrow 14x = 84 \rightarrow x = 6$$

$$\frac{14}{7} = \frac{y}{8} \rightarrow 7y = 112 \rightarrow y = 16$$

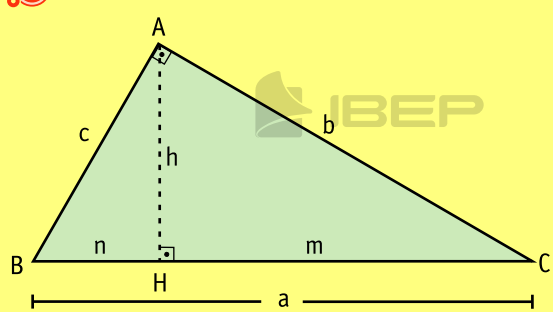
# CAPÍTULO 9 – TRIÂNGULO RETÂNGULO

## Elementos de um triângulo retângulo



a é a hipotenusa.  
 b e c são os catetos.  
 h é a altura relativa à hipotenusa.  
 n é a projeção de AB sobre a hipotenusa.  
 m é a projeção de AC sobre a hipotenusa.

## 1. Relações métricas no triângulo retângulo

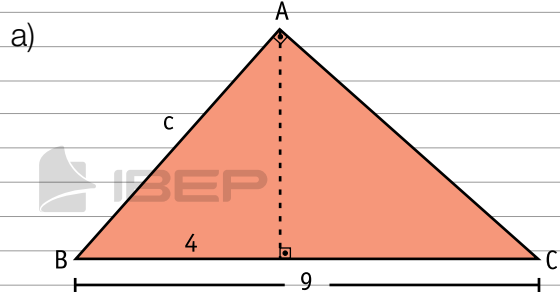


**1ª relação:**  
 O quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

$$c^2 = a \cdot n$$

$$b^2 = a \cdot m$$

1. Calcule a medida do elemento desconhecido nos triângulos retângulos:



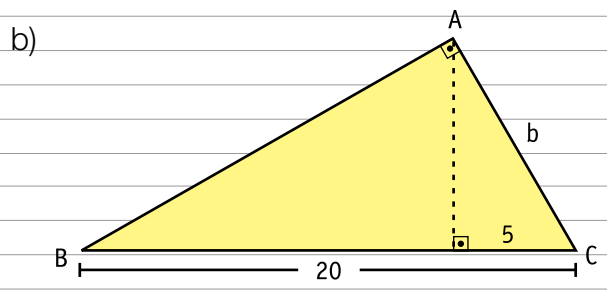
$$c = ? \quad a = 9 \quad n = 4$$

$$c^2 = a \cdot n$$

$$c^2 = 9 \cdot 4$$

$$c^2 = 36$$

$$c = 6$$



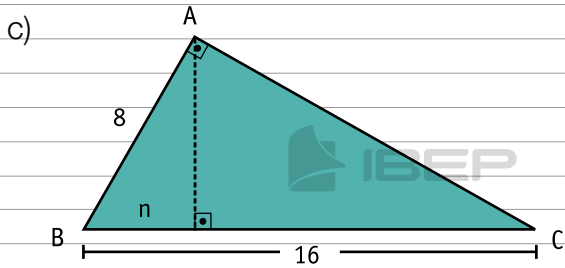
$$b = ? \quad a = 20 \quad m = 5$$

$$b^2 = a \cdot m$$

$$b^2 = 20 \cdot 5$$

$$b^2 = 100$$

$$b = 10$$



$$c = 8 \quad a = 16 \quad n = ?$$

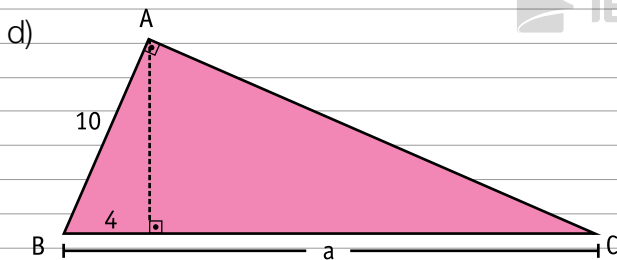
$$c^2 = a \cdot n$$

$$8^2 = 16 \cdot n$$

$$64 = 16n$$

$$n = \frac{64}{16}$$

$$n = 4$$



$$c = 10 \quad a = ? \quad n = 4$$

$$c^2 = a \cdot n$$

$$10^2 = a \cdot 4$$

$$100 = 4a$$

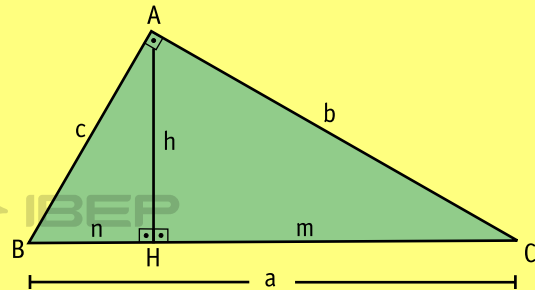
$$a = \frac{100}{4}$$

$$a = 25$$



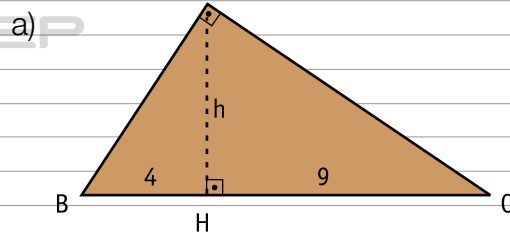
## 2ª relação:

O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



$$h^2 = n \cdot m$$

2. Calcule a medida do elemento desconhecido nos triângulos retângulos:



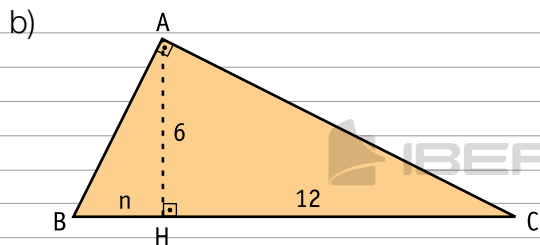
$$h = ? \quad n = 4 \quad e \quad m = 9$$

$$h^2 = n \cdot m$$

$$h^2 = 4 \cdot 9$$

$$h^2 = 36$$

$$h = 6$$



$$h = 6 \quad n = ? \quad m = 12$$

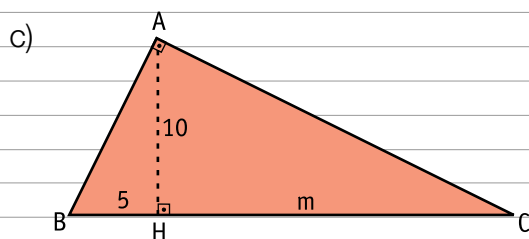
$$h^2 = n \cdot m$$

$$6^2 = n \cdot 12$$

$$36 = 12n$$

$$n = \frac{36}{12}$$

$$n = 3$$



$$h = 10 \quad n = 5 \quad m = ?$$

$$h^2 = n \cdot m$$

$$10^2 = 5 \cdot m$$

$$100 = 5m$$

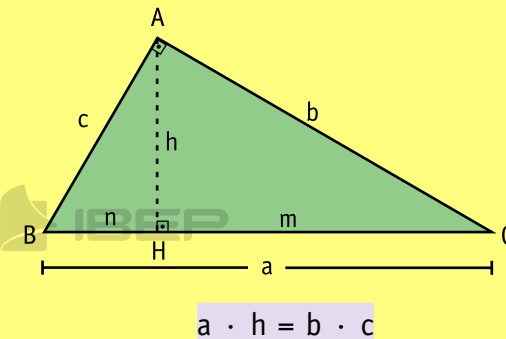
$$m = \frac{100}{5}$$

$$m = 20$$

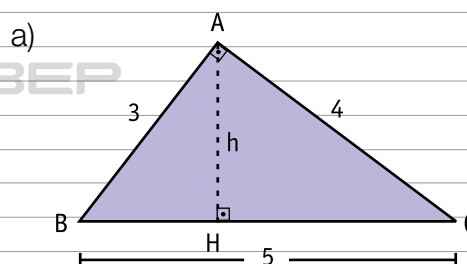


### 3ª relação:

O produto das medidas da hipotenusa e da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos catetos.



3. Determine a medida do elemento desconhecido nos triângulos retângulos.



$$a = 5 \quad h = ? \quad b = 4 \quad c = 3$$

$$a \cdot h = b \cdot c$$

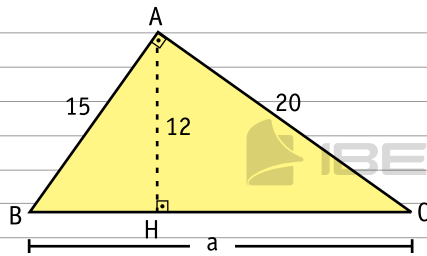
$$5 \cdot h = 4 \cdot 3$$

$$5h = 12$$

$$h = \frac{12}{5}$$

$$h = 2,4$$

b)



$$a = ? \quad h = 12 \quad b = 20 \quad c = 15$$

$$a \cdot h = b \cdot c$$

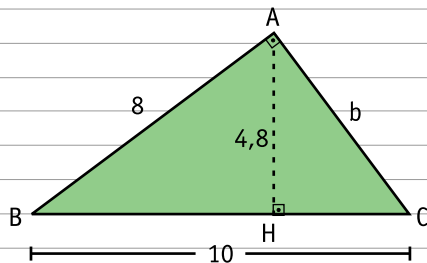
$$a \cdot 12 = 20 \cdot 15$$

$$12a = 300$$

$$a = \frac{300}{12}$$

$$a = 25$$

c)



$$a = 10 \quad h = 4,8 \quad b = ? \quad c = 8$$

$$a \cdot h = b \cdot c$$

$$10 \cdot 4,8 = b \cdot 8$$

$$48 = 8b$$

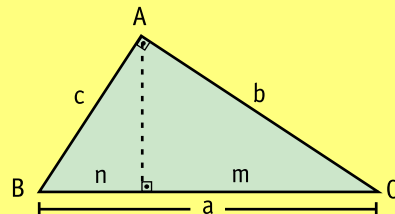
$$b = \frac{48}{8}$$

$$b = 6$$



#### 4ª relação: Teorema de Pitágoras

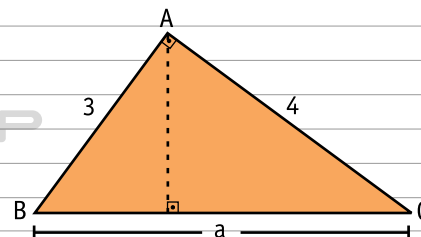
O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

4. Determine a medida do elemento desconhecido nos triângulos retângulos.

a)



$$a = ? \quad b = 4 \quad c = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

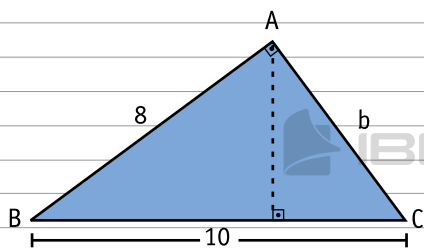
$$a^2 = 4^2 + 3^2$$

$$a^2 = 16 + 9$$

$$a^2 = 25$$

$$a = 5$$

b)



$$a = 10 \quad b = ? \quad c = 8$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

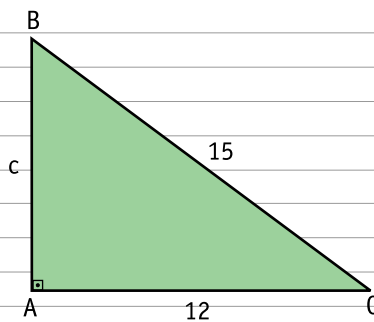
$$10^2 = b^2 + 8^2$$

$$100 = b^2 + 64$$

$$b^2 = 36$$

$$b = 6$$

d)



$$a = 15 \quad b = 12 \quad c = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

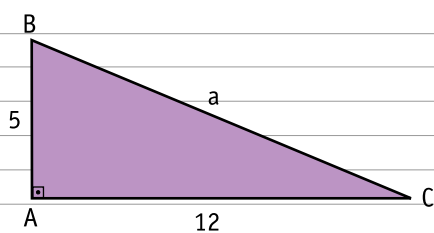
$$15^2 = 12^2 + c^2$$

$$225 = 144 + c^2$$

$$c^2 = 81$$

$$c = 9$$

c)



$$a = ? \quad b = 12 \quad c = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 12^2 + 5^2$$

$$a^2 = 144 + 25$$

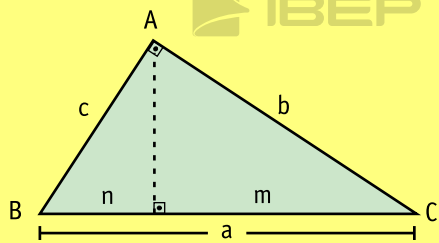
$$a^2 = 169$$

$$a = 13$$





Resumindo as relações métricas no triângulo retângulo, temos:



$$c^2 = a \cdot n$$

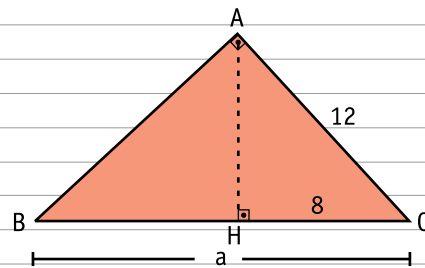
$$b^2 = a \cdot m$$

$$h^2 = n \cdot m$$

$$a \cdot h = b \cdot c$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

b)



$$b^2 = a \cdot m$$

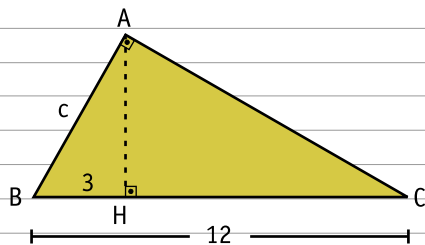
$$144 = a \cdot 8$$

$$a = \frac{144}{8}$$

$$a = 18$$

5. Nos triângulos retângulos, calcule a medida do elemento desconhecido.

a)



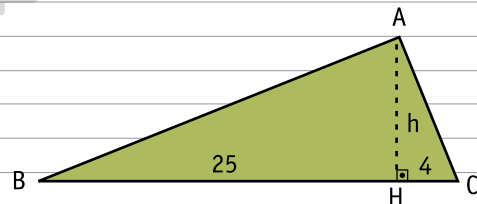
$$c^2 = a \cdot n$$

$$c^2 = 12 \cdot 3$$

$$c^2 = 36$$

$$c = 6$$

c)

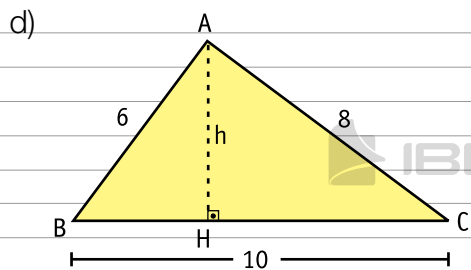


$$h^2 = n \cdot m$$

$$h^2 = 25 \cdot 4$$

$$h^2 = 100$$

$$h = 10$$

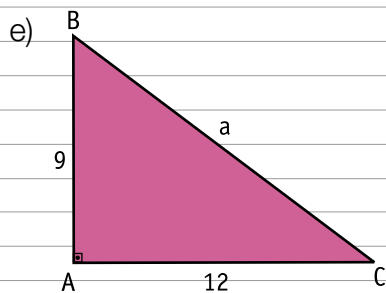


$$a \cdot h = b \cdot c$$

$$10h = 8 \cdot 6$$

$$10h = 48$$

$$h = 4,8$$



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 12^2 + 9^2$$

$$a^2 = 144 + 81$$

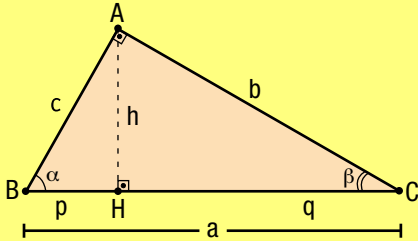
$$a^2 = 225$$

$$a = 15$$

## 2. Aplicações do teorema de Pitágoras

### Teorema de Pitágoras

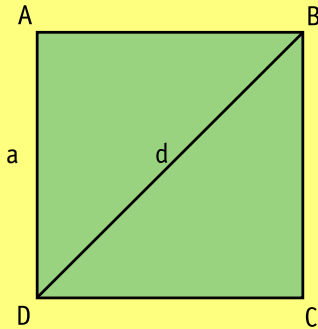
O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

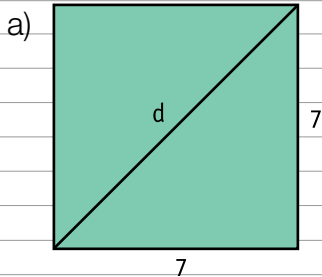
### Diagonal de um quadrado

Considere o quadrado ABCD, de lado  $a$  e diagonal  $d$ .



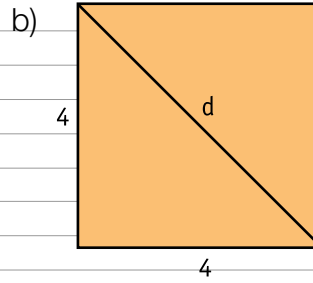
$$d = a\sqrt{2}$$

6. Calcule a medida da diagonal dos quadrados.



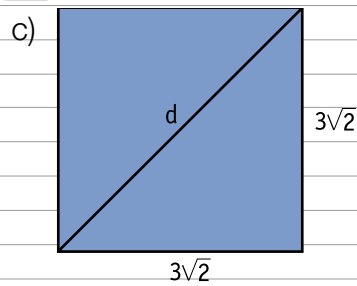
$$d = \ell\sqrt{2}$$

$$d = 7\sqrt{2}$$



$$d = \ell\sqrt{2}$$

$$d = 4\sqrt{2}$$



$$d = \ell\sqrt{2}$$

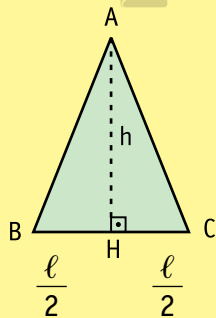
$$d = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$d = 3 \cdot 2$$

$$d = 6$$

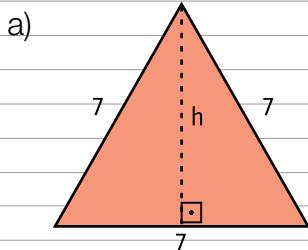
### Altura de um triângulo equilátero

Seja o triângulo equilátero ABC, de lado  $\ell$  e altura  $h$ .



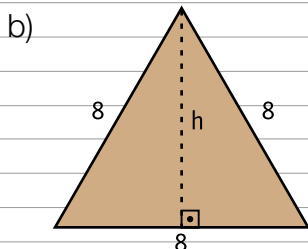
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

7. Calcule a medida da altura dos triângulos equiláteros.



$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$



$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 4\sqrt{3}$$

8. Resolva os problemas.

a) Qual é a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem 12 cm e 16 cm?

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 12^2 + 16^2$$

$$a^2 = 144 + 256$$

$$a^2 = 400 \rightarrow a = 20$$

b) Quanto mede um dos catetos de um triângulo retângulo sabendo que o outro cateto mede 9 cm e a hipotenusa 15 cm?

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$b^2 + 9^2 = 15^2$$

$$b^2 = 225 - 81$$

$$b^2 = 144 \rightarrow b = 12 \text{ cm}$$

c) Qual é a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede  $5\sqrt{2}$  cm?

$$d = \ell\sqrt{2}$$

$$d = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$d = 5 \cdot 2$$

$$d = 10 \text{ cm}$$

d) Calcule o perímetro (soma das medidas dos lados) de um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 cm e 4 cm.

$$\text{perímetro} = a + b + c$$

$$a = ? \quad b = 3 \quad c = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 = 25 \longrightarrow a = 5$$

$$\text{perímetro} = 5 + 3 + 4 = 12 \text{ cm}$$

e) Qual é a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede  $10\sqrt{2}$  cm?

$$d = \ell\sqrt{2}$$

$$10\sqrt{2} = \ell\sqrt{2}$$

$$\ell = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\ell = 10 \text{ cm}$$

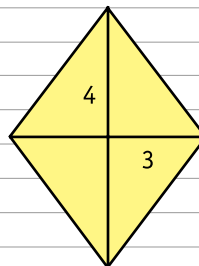
f) Calcule a medida da altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 10 cm.

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{10\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

g) Qual é a medida do lado de um losango cujas diagonais medem 6 cm e 8 cm?

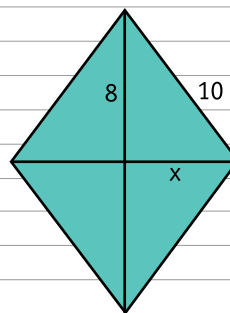


$$\ell^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\ell^2 = 9 + 16$$

$$\ell^2 = 25 \longrightarrow \ell = 5 \text{ cm}$$

h) Num losango de lado 10 cm, uma das diagonais mede 16 cm. Calcule a medida da outra diagonal.



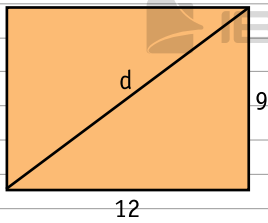
$$x^2 + 8^2 = 10^2$$

$$x^2 + 64 = 100$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6 \longrightarrow 2x = 12 \text{ cm}$$

- i) Calcule a medida da diagonal de um retângulo de dimensões 9 m e 12 m.



$$d^2 = 9^2 + 12^2$$

$$d^2 = 81 + 144$$

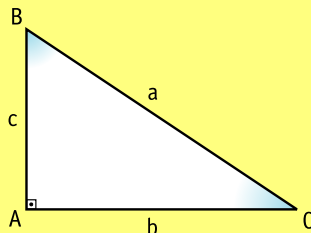
$$d^2 = 225$$

$$d = 15 \text{ cm}$$

### 3. Relações trigonométricas no triângulo retângulo

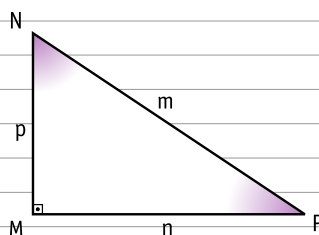


No triângulo retângulo ABC:



- o cateto  $b$  é oposto ao ângulo  $\hat{B}$ ;
- o cateto  $b$  é adjacente ao ângulo  $\hat{C}$ ;
- o cateto  $c$  é oposto ao ângulo  $\hat{C}$ ;
- o cateto  $c$  é adjacente ao ângulo  $\hat{B}$ .

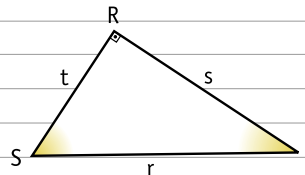
9. Observe o triângulo retângulo MNP.



Agora, complete:

- a) O cateto  $n$  é  ao ângulo  $\hat{N}$ .
- b) O cateto  $p$  é  ao ângulo  $\hat{P}$ .
- c) O cateto  $p$  é  ao ângulo  $\hat{N}$ .
- d) O cateto  $n$  é  ao ângulo  $\hat{P}$ .

10. Dado o triângulo retângulo RST:

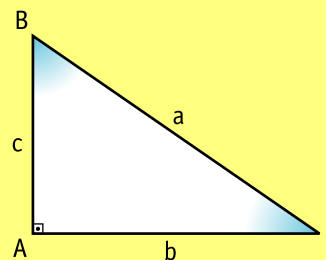


complete:

- a) O cateto  é oposto ao ângulo  $\hat{T}$ .
- b) O cateto  é oposto ao ângulo  $\hat{S}$ .
- c) O cateto  é adjacente ao ângulo  $\hat{S}$ .
- d) O cateto  é adjacente ao ângulo  $\hat{T}$ .



Dado o triângulo retângulo ABC:



Vejam algumas relações trigonométricas entre os ângulos agudos ( $\hat{B}$ ,  $\hat{C}$ ) e os lados desse triângulo:

$$\text{seno } \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\text{cosseno } \hat{B} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

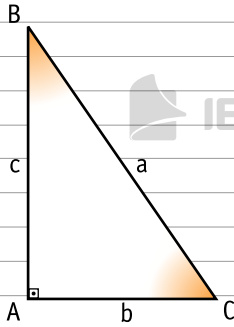
$$\text{tangente } \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

Abreviando:

temos:

$$\begin{cases} \text{seno } \hat{B} \text{ por } \text{sen } \hat{B} \\ \text{cosseno } \hat{B} \text{ por } \text{cos } \hat{B} \\ \text{tangente } \hat{B} \text{ por } \text{tg } \hat{B} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \\ \text{cos } \hat{B} = \frac{c}{a} \\ \text{tg } \hat{B} = \frac{b}{c} \end{cases}$$

11. Dada a figura:



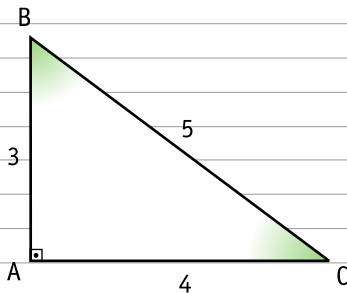
complete:

a)  $\text{sen } \hat{C} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$

b)  $\text{cos } \hat{C} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$

c)  $\text{tg } \hat{C} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{c}{b}$

12. Dado o triângulo retângulo:



determine:

a)  $\text{sen } \hat{B} = \frac{4}{5}$

d)  $\text{sen } \hat{C} = \frac{3}{5}$

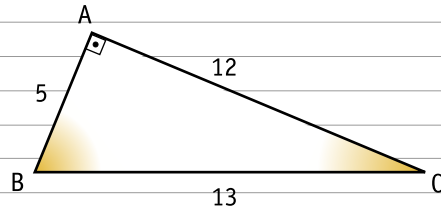
b)  $\text{cos } \hat{B} = \frac{3}{5}$

e)  $\text{cos } \hat{C} = \frac{4}{5}$

c)  $\text{tg } \hat{B} = \frac{4}{3}$

f)  $\text{tg } \hat{C} = \frac{3}{4}$

13. Dada a figura:



complete:

a)  $\text{sen } \hat{B} = \frac{12}{13}$

d)  $\text{sen } \hat{C} = \frac{5}{13}$

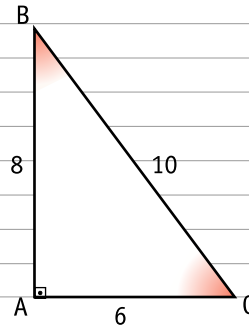
b)  $\text{cos } \hat{B} = \frac{5}{13}$

e)  $\text{cos } \hat{C} = \frac{12}{13}$

c)  $\text{tg } \hat{B} = \frac{12}{5}$

f)  $\text{tg } \hat{C} = \frac{5}{12}$

14. Dado o triângulo retângulo ABC:



complete:

a)  $\text{sen } \hat{B} = \frac{6}{10}$

→  $\text{sen } \hat{B} = \text{cos } \hat{C}$

$\text{cos } \hat{C} = \frac{6}{10}$

(= ou ≠)

b)  $\text{sen } \hat{C} = \frac{8}{10}$

→  $\text{sen } \hat{C} = \text{cos } \hat{B}$

$\text{cos } \hat{B} = \frac{8}{10}$

(= ou ≠)

c)  $\text{tg } \hat{B} = \frac{6}{8}$

→  $\text{tg } \hat{B} \neq \text{tg } \hat{C}$

$\text{tg } \hat{C} = \frac{8}{6}$

(= ou ≠)



## TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para facilitar os cálculos podemos montar e usar uma tabela com os valores do seno, do cosseno e da tangente de ângulos de  $1^\circ$  a  $90^\circ$ , com valores aproximados.

ângulo	seno	cosseno	tangente	ângulo	seno	cosseno	tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	90°	1,0000	0,0000	-

**15.** Utilizando a tabela de razões trigonométricas, determine.

a)  $\text{sen } 57^\circ =$

b)  $\text{cos } 45^\circ =$

c)  $\text{sen } 32^\circ =$

d)  $\text{tg } 45^\circ =$

e)  $\text{sen } 30^\circ =$

f)  $\text{cos } 60^\circ =$

g)  $\text{tg } 40^\circ =$

h)  $\text{tg } 50^\circ =$

**16.** Com o auxílio da tabela de razões trigonométricas, complete.

a)  $\text{sen } x = 0,3584 \longrightarrow x =$

b)  $\text{cos } x = 0,2419 \longrightarrow x =$

c)  $\text{tg } x = 0,8391 \longrightarrow x =$

d)  $\text{sen } x = 0,9903 \longrightarrow x =$

e)  $\text{cos } x = 0,9135 \longrightarrow x =$

f)  $\text{tg } x = 2,3559 \longrightarrow x =$

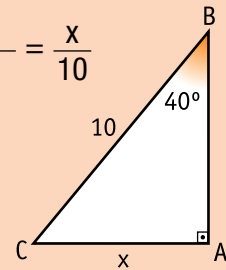
**Exemplo:**  
Determine o valor de  $x$  no triângulo retângulo:

$$\text{sen } 40^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{10}$$

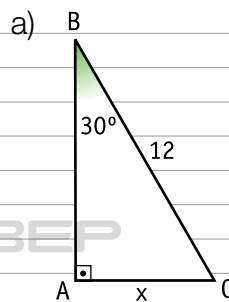
$$\text{sen } 40^\circ = 0,6428 \quad (\text{vide tabela})$$

$$0,6428 = \frac{x}{10}$$

$$x = 10 \cdot 0,6428 \longrightarrow x = 6,428$$



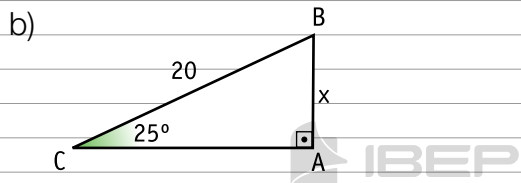
**17.** Calcule o valor de  $x$  nos triângulos retângulos.



$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{12}$$

$$0,5000 = \frac{x}{12}$$

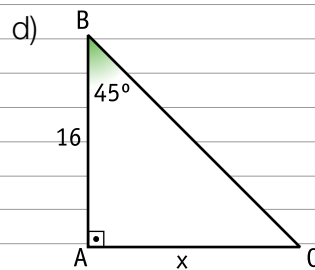
$$x = 12 \cdot 0,5000 \longrightarrow x = 6$$



$$\sin 25^\circ = \frac{x}{20}$$

$$0,4226 = \frac{x}{20}$$

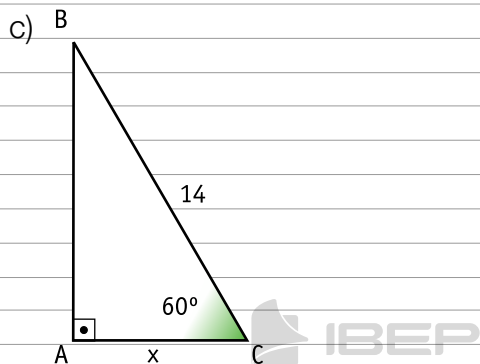
$$x = 20 \cdot 0,4226 \longrightarrow x = 8,452$$



$$\tan 45^\circ = \frac{x}{16}$$

$$1 = \frac{x}{16}$$

$$x = 16 \cdot 1 \longrightarrow x = 16$$



$$\cos 60^\circ = \frac{x}{14}$$

$$0,5000 = \frac{x}{14}$$

$$x = 14 \cdot 0,5000 \longrightarrow x = 7$$

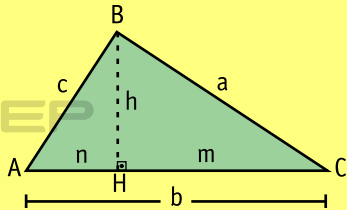


# CAPÍTULO 10 – RELAÇÕES MÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

## 1. Relações métricas



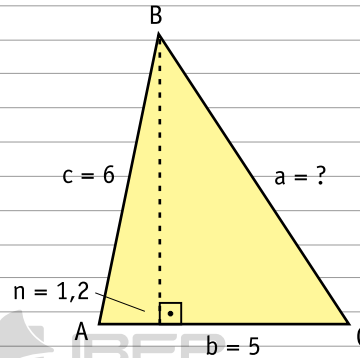
**1ª relação:** Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto da medida de um deles pela medida da projeção do outro sobre ele.



- $\hat{A}$  é agudo.
- $n \rightarrow$  projeção de  $c$  sobre  $b$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$$

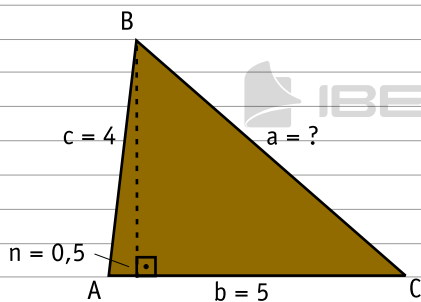
b)



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bn \\ a^2 &= 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1,2 \\ a^2 &= 25 + 36 - 12 \\ a^2 &= 49 \rightarrow a = \sqrt{49} \rightarrow a = 7 \end{aligned}$$

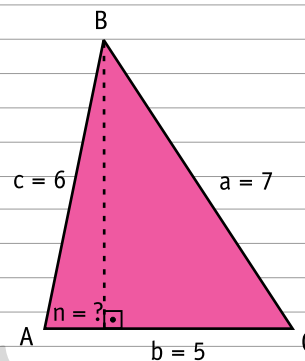
1. Calcule a medida do elemento desconhecido nos triângulos.

a)



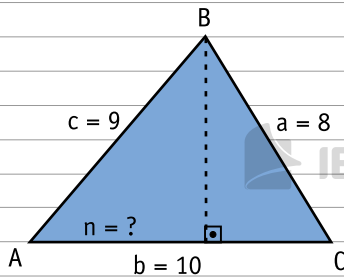
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bn \\ a^2 &= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 0,5 \\ a^2 &= 25 + 16 - 5 \\ a^2 &= 36 \\ a &= \sqrt{36} \\ a &= 6 \end{aligned}$$

c)



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bn \\ 7^2 &= 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot n \\ 49 &= 25 + 36 - 10n \\ 10n &= 25 + 36 - 49 \\ 10n &= 12 \\ n &= \frac{12}{10} \rightarrow n = 1,2 \end{aligned}$$

d)



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$$

$$8^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \cdot 10 \cdot n$$

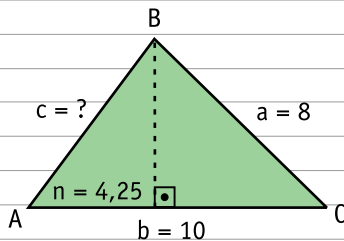
$$64 = 100 + 81 - 20n$$

$$20n = 100 + 81 - 64$$

$$20n = 117$$

$$n = \frac{117}{20} \rightarrow n = 5,85$$

e)



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$$

$$8^2 = 10^2 + c^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4,25$$

$$64 = 100 + c^2 - 85$$

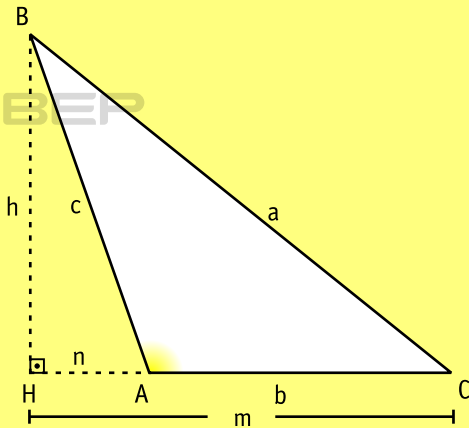
$$-c^2 = 100 - 85 - 64$$

$$-c^2 = -49$$

$$c^2 = 49 \rightarrow c = \sqrt{49} \rightarrow c = 7$$



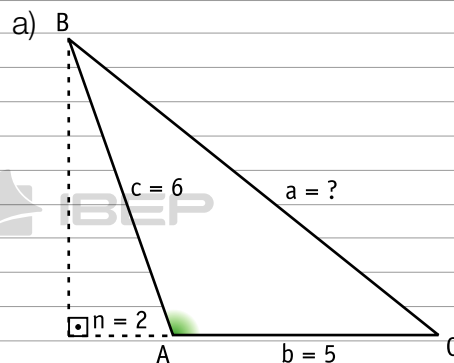
**2ª relação:** Em um triângulo obtusângulo, o quadrado da medida do lado oposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados mais duas vezes o produto da medida de um desses lados pela medida da projeção do outro sobre a reta suporte dele.



- $\hat{A}$  é obtuso.
- $n \rightarrow$  projeção de  $c$  sobre a reta suporte de  $b$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$$

**2.** Calcule a medida do elemento desconhecido nos triângulos.



$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$$

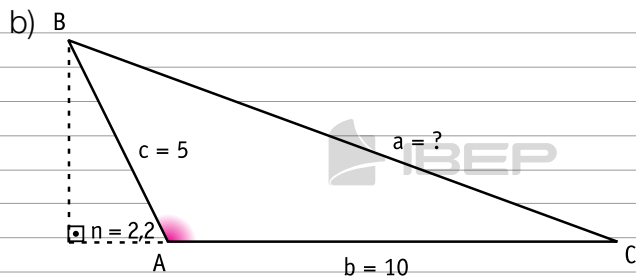
$$a^2 = 5^2 + 6^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2$$

$$a^2 = 25 + 36 + 20$$

$$a^2 = 81$$

$$a = \sqrt{81}$$

$$a = 9$$



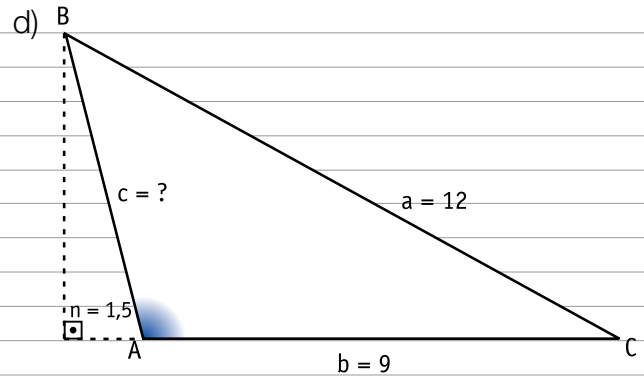
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$$

$$a^2 = 10^2 + 5^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2,2$$

$$a^2 = 100 + 25 + 44$$

$$a^2 = 169$$

$$a = \sqrt{169} \rightarrow a = 13$$



$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$$

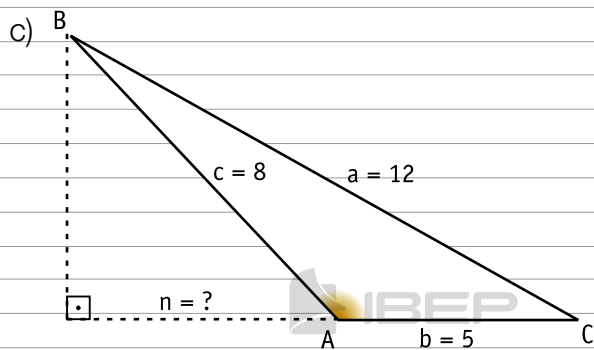
$$12^2 = 9^2 + c^2 + 2 \cdot 9 \cdot 1,5$$

$$144 = 81 + c^2 + 27$$

$$-c^2 = 81 + 27 - 144$$

$$-c^2 = -36 \rightarrow c^2 = 36$$

$$c = \sqrt{36} \rightarrow c = 6$$



$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$$

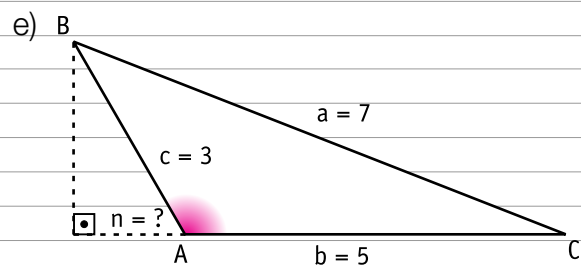
$$12^2 = 5^2 + 8^2 + 2 \cdot 5 \cdot n$$

$$144 = 25 + 64 + 10n$$

$$-10n = 25 + 64 - 144$$

$$-10n = -55 \rightarrow 10n = 55$$

$$n = \frac{55}{10} \rightarrow n = 5,5$$



$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$$

$$7^2 = 5^2 + 3^2 + 2 \cdot 5 \cdot n$$

$$49 = 25 + 9 + 10n$$

$$-10n = 25 + 9 - 49$$

$$-10n = -15 \rightarrow 10n = 15$$

$$n = \frac{15}{10} \rightarrow n = 1,5$$

## 2. Classificação de um triângulo quanto aos ângulos



Podemos classificar um triângulo quanto aos ângulos internos (retângulo, acutângulo, obtusângulo) por meio das medidas de seus lados.

Considere um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com as medidas expressas numa mesma unidade. A medida do lado maior é  $a$ .

$$\text{Se: } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow \text{triângulo é retângulo.} \\ a^2 < b^2 + c^2 \longrightarrow \text{triângulo é acutângulo.} \\ a^2 > b^2 + c^2 \longrightarrow \text{triângulo é obtusângulo.} \end{cases}$$

Exemplo:

Classifique, quanto aos ângulos, um triângulo de lados 8 cm, 9 cm e 10 cm.

$$\begin{array}{lll} a = 10 & b = 8 & c = 9 \\ a^2 = 100 & b^2 = 64 & c^2 = 81 \end{array}$$

$$b^2 + c^2 = 64 + 81$$

$$b^2 + c^2 = 145$$

Portanto:

$$a^2 < b^2 + c^2 \longrightarrow \text{triângulo é acutângulo.}$$

c) 3 cm, 6 cm, 5 cm

$$a = 6; b = 3; c = 5$$

$$a^2 = 36; b^2 = 9; c^2 = 25$$

$$b^2 + c^2 = 9 + 25 = 34$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \longrightarrow \text{triângulo é obtusângulo}$$

3. Classifique, quanto aos ângulos, os triângulos cujos lados medem:

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm

$$a = 5; b = 3; c = 4$$

$$a^2 = 25; b^2 = 9; c^2 = 16$$

$$b^2 + c^2 = 9 + 16 = 25$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow \text{triângulo é retângulo}$$

d) 13 cm, 12 cm, 5 cm

$$a = 13; b = 12; c = 5$$

$$a^2 = 169; b^2 = 144; c^2 = 25$$

$$b^2 + c^2 = 144 + 25 = 169$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \longrightarrow \text{triângulo é retângulo}$$

b) 10 cm, 6 cm, 9 cm

$$a = 10; b = 6; c = 9$$

$$a^2 = 100; b^2 = 36; c^2 = 81$$

$$b^2 + c^2 = 36 + 81 = 117$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \longrightarrow \text{triângulo é acutângulo}$$

e) 4 cm, 5 cm, 8 cm

$$a = 8; b = 4; c = 5$$

$$a^2 = 64; b^2 = 16; c^2 = 25$$

$$b^2 + c^2 = 16 + 25 = 41$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \longrightarrow \text{triângulo é obtusângulo}$$



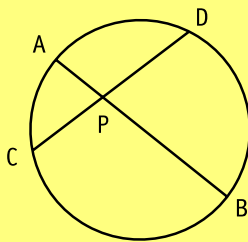
# CAPÍTULO 11 – CIRCUNFERÊNCIA E POLÍGONOS REGULARES

## 1. Relações métricas na circunferência

1ª relação: Potência de um ponto (P interno à circunferência)



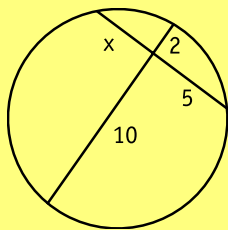
A intersecção de duas cordas de uma circunferência gera segmentos proporcionais: o produto das medidas dos segmentos determinados em uma delas é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados na outra.



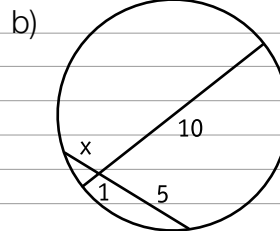
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Exemplo:

Determine o valor de x:



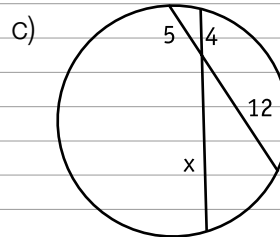
$$\begin{aligned} 5 \cdot x &= 10 \cdot 2 \\ 5x &= 20 \\ x &= \frac{20}{5} \rightarrow x = 4 \end{aligned}$$



$$5 \cdot x = 1 \cdot 10$$

$$5x = 10$$

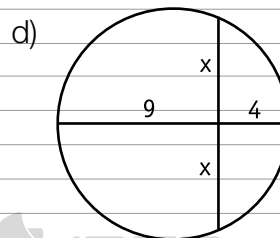
$$x = \frac{10}{5} \rightarrow x = 2$$



$$4x = 5 \cdot 12$$

$$4x = 60$$

$$x = \frac{60}{4} \rightarrow x = 15$$

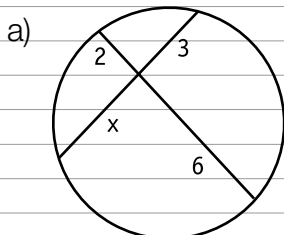


$$x \cdot x = 9 \cdot 4$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} \rightarrow x = 6$$

1. Calcule o valor de x.



$$3 \cdot x = 2 \cdot 6$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3} \rightarrow x = 4$$

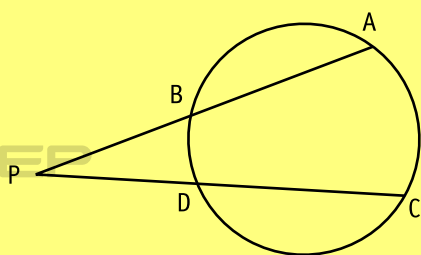


## 2ª relação: Potência de um ponto

### (P externo à circunferência)



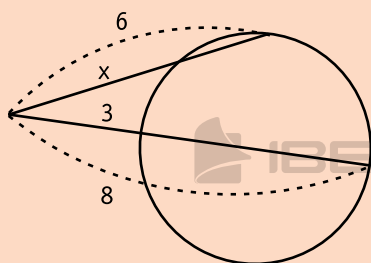
Dois segmentos secantes têm uma extremidade num ponto P, externo à circunferência; então, o produto das medidas de um deles pela medida de sua parte externa é igual ao produto das medidas do outro pela medida de sua parte externa.



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Exemplo:

Determine o valor de x.



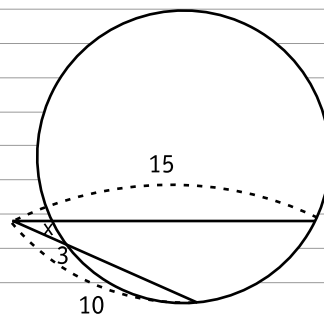
$$6 \cdot x = 8 \cdot 3$$

$$6x = 24$$

$$x = \frac{24}{6} \rightarrow x = 4$$

2. Calcule o valor de x.

a)

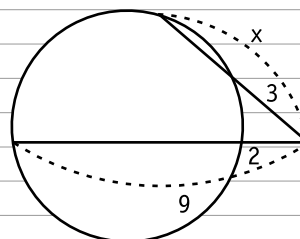


$$15 \cdot x = 10 \cdot 3$$

$$15x = 30$$

$$x = \frac{30}{15} \rightarrow x = 2$$

b)

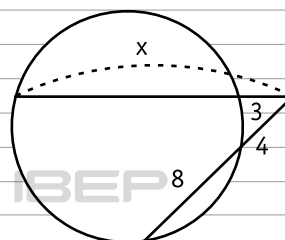


$$x \cdot 3 = 9 \cdot 2$$

$$3x = 18$$

$$x = \frac{18}{3} \rightarrow x = 6$$

c)



$$x \cdot 3 = (8 + 4) \cdot 4$$

$$3x = 12 \cdot 4$$

$$3x = 48$$

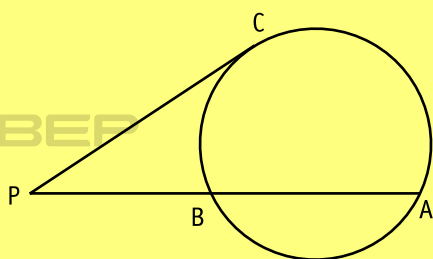
$$x = \frac{48}{3} \rightarrow x = 16$$

### 3ª relação: Potência de um ponto

(segmento secante e segmento tangente à circunferência)

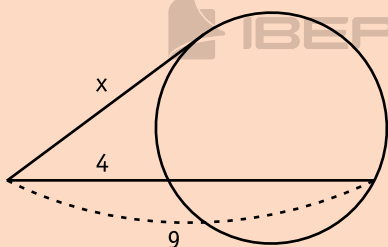


Um segmento tangente e um secante são traçados a partir de um ponto P, externo à circunferência. Então, o quadrado da medida do segmento tangente é igual ao produto das medidas do segmento secante pela medida da sua parte externa.



$$(PC)^2 = PA \cdot PB$$

Exemplo:  
Determine o valor de x.

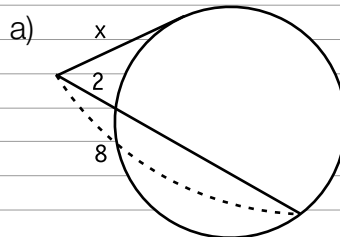


$$x^2 = 9 \cdot 4$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} \rightarrow x = 6$$

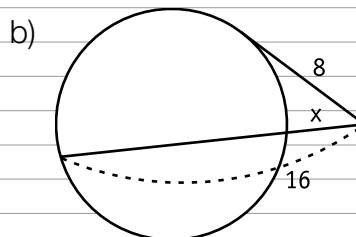
3. Calcule o valor de x.



$$x^2 = 8 \cdot 2$$

$$x^2 = 16$$

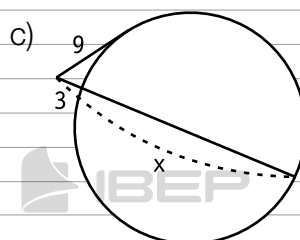
$$x = \sqrt{16} \rightarrow x = 4$$



$$8^2 = 16 \cdot x$$

$$64 = 16x$$

$$x = \frac{64}{16} \rightarrow x = 4$$

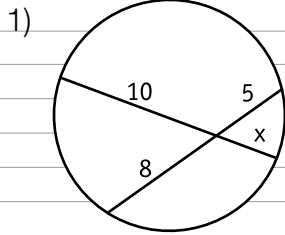


$$9^2 = x \cdot 3$$

$$81 = 3x$$

$$x = \frac{81}{3} \rightarrow x = 27$$

4. Assinale a alternativa que indica o valor de x.

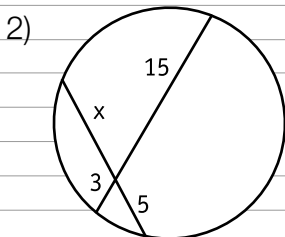


- a) 2      c) 6  
 b) 4      d) 8

$$10 \cdot x = 8 \cdot 5$$

$$10x = 40$$

$$x = \frac{40}{10} \rightarrow x = 4$$

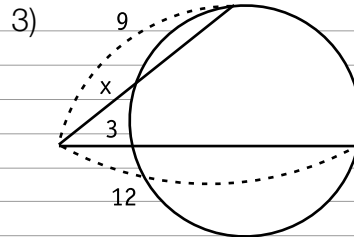


- a) 1      c) 9  
 b) 5      d) 15

$$x \cdot 5 = 15 \cdot 3$$

$$5x = 45$$

$$x = \frac{45}{5} \rightarrow x = 9$$

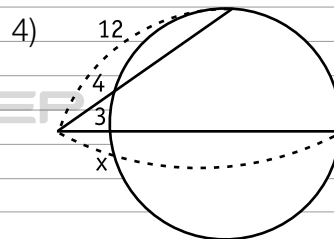


- a) 12      c) 3  
 b) 16      d) 4

$$9 \cdot x = 12 \cdot 3$$

$$9x = 36$$

$$x = \frac{36}{9} \rightarrow x = 4$$



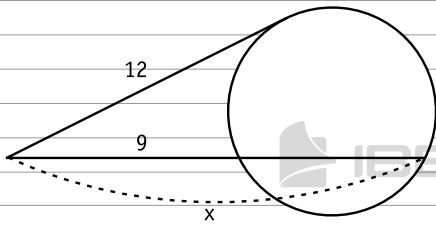
- a) 12      c) 16  
 b) 4      d) 18

$$12 \cdot 4 = x \cdot 3$$

$$48 = 3x$$

$$x = \frac{48}{3} \rightarrow x = 16$$

5)



a) 10      c) 14

b) 12      **d) 16**

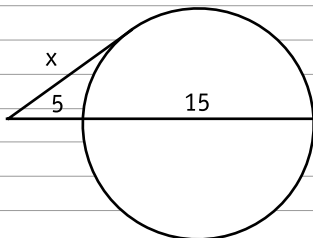
$$12^2 = x \cdot 9$$

$$144 = 9x$$

$$x = \frac{144}{9} \rightarrow x = 16$$

IBEP

6)



a) 8      c) 20

**b) 10**      d) 16

$$x^2 = (5 + 15) \cdot 5$$

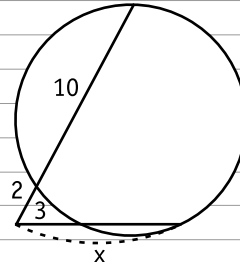
$$x^2 = 20 \cdot 5$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100} \rightarrow x = 10$$

IBEP

7)



a) 5      **c) 8**

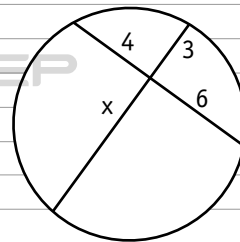
b) 10      d) 16

$$x \cdot 3 = (2 + 10) \cdot 2$$

$$3x = 24$$

$$x = \frac{24}{3} \rightarrow x = 8$$

8)



a) 4      c) 2

**b) 8**      d) 7

$$x \cdot 3 = 6 \cdot 4$$

$$3x = 24$$

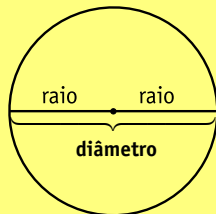
$$x = \frac{24}{3} \rightarrow x = 8$$

IBEP

## Comprimento de uma circunferência



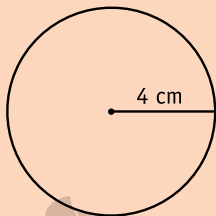
- A medida do diâmetro de uma circunferência é igual a duas vezes a medida do raio dessa circunferência, ou seja:  $d = 2r$



- Já a medida do comprimento ( $C$ ) de uma circunferência de raio  $r$  é dada pela expressão:  $C = 2\pi r$ , onde  $\pi \cong 3,14$

### Exemplo:

Calcule o comprimento de uma circunferência de raio igual a 4 cm.



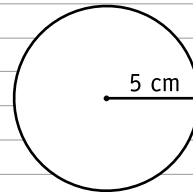
$$C = 2\pi r$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 4$$

$$C = 25,12 \text{ cm}$$

5. Calcule o comprimento das circunferências.

a)

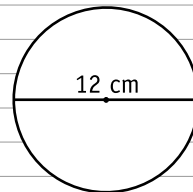


$$C = 2\pi r$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 5$$

$$C = 31,4 \text{ cm}$$

b)



$$C = 2\pi r$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 6$$

$$C = 37,68 \text{ cm}$$

6. Resolva os problemas.

- a) Qual é o comprimento de uma circunferência cujo raio mede 8 cm?

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 8 \rightarrow C = 50,24 \text{ cm}$$

b) O diâmetro de uma circunferência mede 4 cm. Qual é o comprimento dessa circunferência?

$$r = \frac{d}{2} \rightarrow r = 2 \text{ cm}$$

$$C = 2\pi r \rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow C = 12,56 \text{ cm}$$

c) O comprimento de uma circunferência é igual a 62,8 cm. Qual é a medida do raio dessa circunferência?

$$C = 2\pi r$$

$$62,8 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \rightarrow 62,8 = 6,28 r$$

$$r = \frac{62,8}{6,28} \rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

d) Determine a medida do raio de uma circunferência de comprimento igual a 37,68 cm.

$$C = 2\pi r$$

$$37,68 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \rightarrow 37,68 = 6,28 r$$

$$r = \frac{37,68}{6,28} \rightarrow r = 6 \text{ cm}$$

e) Calcule a medida do diâmetro de uma circunferência de comprimento igual a 18,84 cm.

$$C = 2\pi r$$

$$18,84 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \rightarrow 18,84 = 6,28 r$$

$$r = \frac{18,84}{6,28} \rightarrow r = 3 \text{ cm} \rightarrow d = 6 \text{ cm}$$

f) Qual é a medida do diâmetro de uma circunferência de comprimento igual a 43,96 cm?

$$C = 2\pi r$$

$$43,96 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \rightarrow 43,96 = 6,28 r$$

$$r = \frac{43,96}{6,28} \rightarrow r = 7 \text{ cm} \rightarrow d = 14 \text{ cm}$$

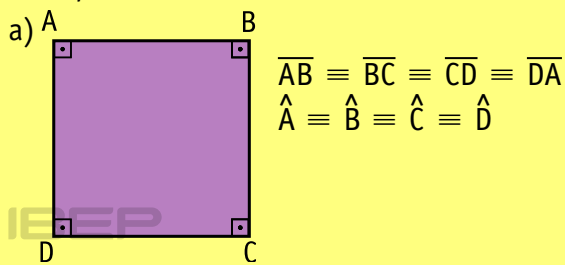
## 2. Relações métricas nos polígonos regulares

### Polígono regular

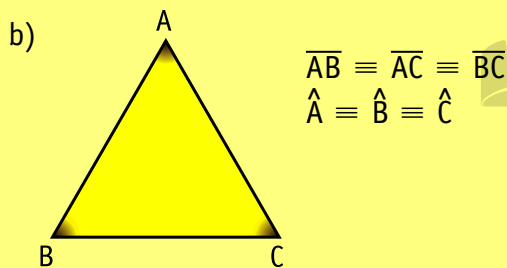


Polígono regular é aquele cujos lados são congruentes e cujos ângulos são congruentes.

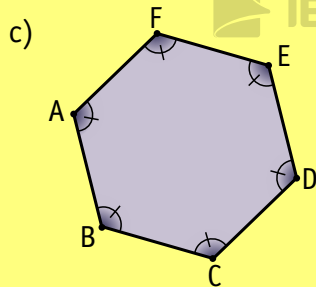
Exemplos:



Quadrado



Triângulo equilátero



Hexágono regular

$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{FA}$$

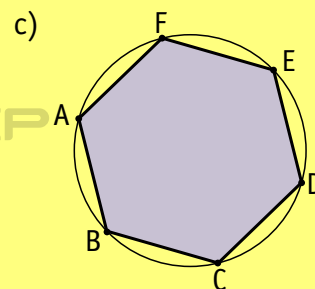
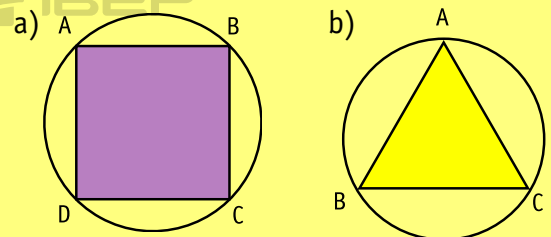
$$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} \equiv \hat{E} \equiv \hat{F}$$

### Polígono inscrito e polígono circunscrito



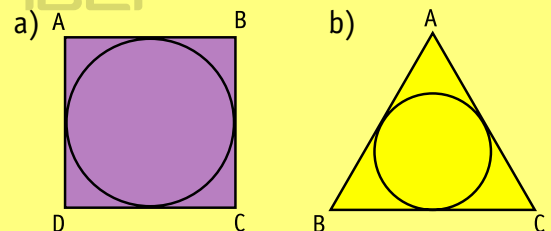
**Polígono inscrito** numa circunferência é aquele cujos vértices pertencem à circunferência.

Exemplos:

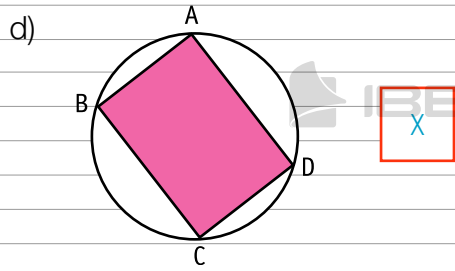
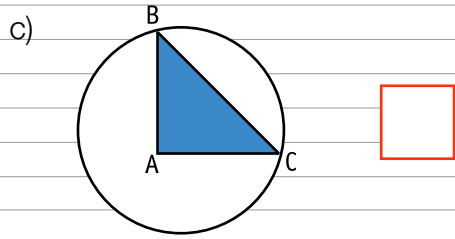
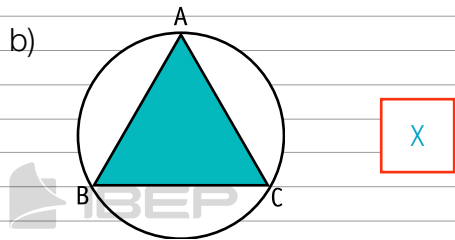
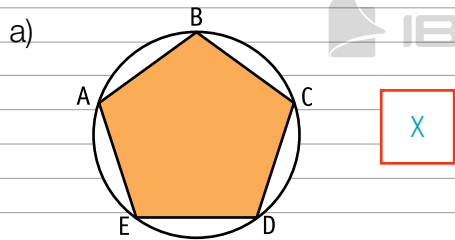


**Polígono circunscrito** a uma circunferência é aquele cujos lados são tangentes a essa circunferência.

Exemplos:



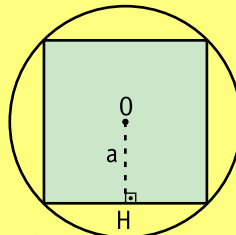
7. Assinale com X os polígonos inscritos numa circunferência.



### Apótema e ângulo central de um polígono regular



#### Apótema de um polígono regular

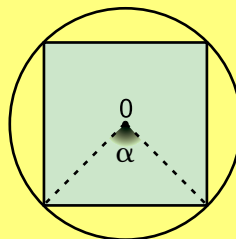


A distância do centro do polígono aos lados chama-se **apótema** (a):

$$m(\overline{OH}) = a$$



#### Ângulo central de um polígono regular



Ângulo central ( $\alpha$ ) é aquele cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono.

A medida do ângulo central ( $\alpha$ ) de um polígono regular é:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}, \text{ onde } n \text{ é o número de lados.}$$

#### Exemplo:

Qual é a medida do ângulo central do pentágono regular?

$n = 5$  (pentágono: polígono de cinco lados)

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{5} \rightarrow \alpha = 72^\circ$$



**8.** Determine a medida do ângulo central dos polígonos regulares.

a) Triângulo ( $n = 3$ )

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{3} \rightarrow \alpha = 120^\circ$$

b) Quadrado ( $n = 4$ )

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{4} \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

c) Hexágono ( $n = 6$ )

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{6} \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

d) Octógono ( $n = 8$ )

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{8} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

e) Decágono ( $n = 10$ )

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{10} \rightarrow \alpha = 36^\circ$$

f) Icoságono ( $n = 20$ )

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{20} \rightarrow \alpha = 18^\circ$$

**9.** Identifique o polígono regular cujo ângulo central mede:

a)  $\alpha = 90^\circ$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow 90^\circ = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow n = \frac{360^\circ}{90} \rightarrow n = 4$$

Quadrado.

b)  $\alpha = 72^\circ$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow 72^\circ = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow n = \frac{360^\circ}{72} \rightarrow n = 5$$

Pentágono.

c)  $\alpha = 36^\circ$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow 36^\circ = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow n = \frac{360^\circ}{36} \rightarrow n = 10$$

Decágono.

d)  $\alpha = 40^\circ$

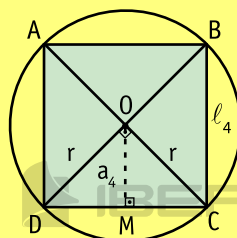
$$\alpha = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow 40^\circ = \frac{360^\circ}{n} \rightarrow n = \frac{360^\circ}{40} \rightarrow n = 9$$

Eneágono.

### Cálculo do lado e do apótema de alguns polígonos regulares inscritos



Cálculo do lado e do apótema do quadrado inscrito numa circunferência em função do raio



Lado do quadrado ( $\ell_4$ )

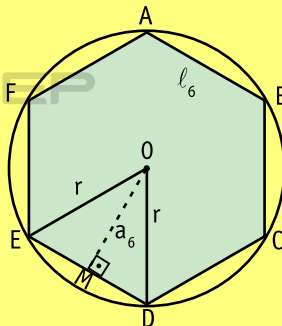
$$\ell_4 = r\sqrt{2}$$

Apótema do quadrado ( $a_4$ )

$$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$



Cálculo do lado e do apótema do hexágono regular inscrito numa circunferência em função do raio



Lado do hexágono regular ( $\ell_6$ )

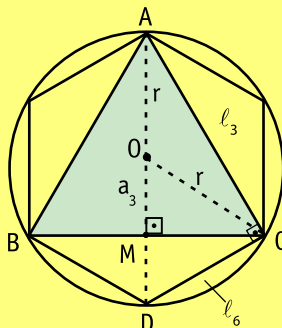
$$\ell_6 = r$$

Apótema do hexágono regular ( $a_6$ )

$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$



Cálculo do lado e do apótema do triângulo equilátero inscrito numa circunferência em função do raio



Lado do triângulo equilátero ( $\ell_3$ )

$$\ell_3 = r\sqrt{3}$$

Apótema do triângulo equilátero ( $a_3$ )

$$a_3 = \frac{r}{2}$$

## Resumo: Relações métricas nos polígonos regulares

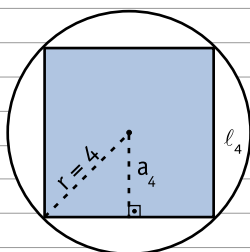


Resumindo as relações métricas nos polígonos regulares, temos:

Polígono inscrito	Lado	Apótema
Quadrado	$\ell_4 = r\sqrt{2}$	$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$
Hexágono regular	$\ell_6 = r$	$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$
Triângulo equilátero	$\ell_3 = r\sqrt{3}$	$a_3 = \frac{r}{2}$

**10.** Calcule o lado e o apótema dos polígonos inscritos.

a)



$$\ell_4 = r\sqrt{2}$$

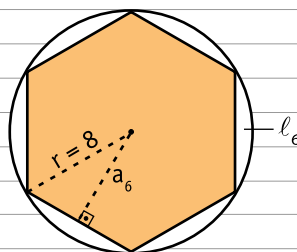
$$\ell_4 = 4\sqrt{2}$$

$$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

$$a_4 = \frac{4\sqrt{2}}{2}$$

$$a_4 = 2\sqrt{2}$$

b)



$$\ell_6 = r$$

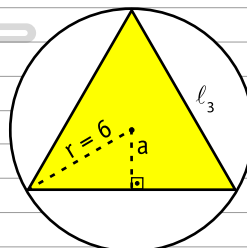
$$\ell_6 = 8$$

$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$a_6 = \frac{8\sqrt{3}}{2}$$

$$a_6 = 4\sqrt{3}$$

c)



$$\ell_3 = r\sqrt{3}$$

$$\ell_3 = 6\sqrt{3}$$

$$a_3 = \frac{r}{2}$$

$$a_3 = \frac{6}{2}$$

$$a_3 = 3$$

**11.** Resolva os problemas.

a) Calcule as medidas do lado e do apótema de um quadrado inscrito numa circunferência de raio igual a 12 cm.

$$r = 12 \text{ cm} \quad a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$
$$\ell_4 = r\sqrt{2}$$
$$\ell_4 = 12\sqrt{2} \text{ cm} \quad a_4 = \frac{12\sqrt{2}}{2}$$
$$a_4 = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

c) Calcule as medidas do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio igual a 10 cm.

$$r = 10 \text{ cm} \quad a_3 = \frac{r}{2}$$
$$\ell_3 = r\sqrt{3}$$
$$\ell_3 = 10\sqrt{3} \text{ cm} \quad a_3 = \frac{10}{2}$$

$$a_3 = 5 \text{ cm}$$

b) Calcule as medidas do lado e do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio igual a 20 cm.

$$r = 20 \text{ cm} \quad a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$
$$\ell_6 = r \quad a_6 = \frac{20\sqrt{3}}{2}$$
$$\ell_6 = 20 \text{ cm} \quad a_6 = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

d) Qual é a medida do lado de um quadrado inscrito numa circunferência de raio igual a  $\sqrt{2}$  cm?

$$r = \sqrt{2} \text{ cm}$$
$$\ell_4 = r\sqrt{2}$$
$$\ell_4 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$
$$\ell_4 = 2 \text{ cm}$$

e) Qual é a medida do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio igual a  $4\sqrt{3}$  cm?

$$r = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$a_6 = \frac{4\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2}$$

$$a_6 = 6 \text{ cm}$$

f) Qual é a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de raio igual a  $8\sqrt{3}$  cm?

$$r = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$l_3 = r\sqrt{3}$$

$$l_3 = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 8 \times 3$$

$$l_3 = 24 \text{ cm}$$

g) Determine as medidas do lado de um quadrado e do apótema de um hexágono regular inscritos numa circunferência de raio igual a 24 cm.

$$r = 24 \text{ cm}$$

$$l_4 = r\sqrt{2}$$

$$l_4 = 24\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$a_6 = \frac{24\sqrt{3}}{2}$$

$$a_6 = 12\sqrt{3} \text{ cm}$$

h) Determine as medidas do lado de um hexágono regular e do apótema de um triângulo equilátero inscritos numa circunferência de raio igual a 14 cm.

$$r = 14 \text{ cm}$$

$$l_6 = r$$

$$l_6 = 14 \text{ cm}$$

$$a_3 = \frac{r}{2}$$

$$a_3 = \frac{14}{2}$$

$$a_3 = 7 \text{ cm}$$

- i) Calcule as medidas do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência de diâmetro igual a 16 cm.

$$r = 8 \text{ cm}$$

$$\ell_3 = r\sqrt{3}$$

$$\ell_3 = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$a_3 = \frac{r}{2}$$

$$a_3 = \frac{8}{2}$$

$$a_3 = 4 \text{ cm}$$

- j) O lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência mede 10 cm. Calcule a medida do lado de um quadrado inscrito nessa circunferência.

$$\ell_6 = r \rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

$$\ell_4 = r\sqrt{2}$$

$$\ell_4 = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

- k) O perímetro de um hexágono regular inscrito numa circunferência é igual a 24 cm. Calcule as medidas do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência.

$$\ell_6 = \frac{24}{6} \rightarrow \ell_6 = 4 \text{ cm} \rightarrow r = 4 \text{ cm}$$

$$\ell_3 = r\sqrt{3}$$

$$\ell_3 = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$a_3 = \frac{r}{2}$$

$$a_3 = \frac{4}{2}$$

$$a_3 = 2 \text{ cm}$$

- l) O apótema de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência mede 5 cm. Calcule a medida do lado de um quadrado inscrito nessa circunferência.

$$a_3 = 5 \text{ cm}$$

$$a_3 = \frac{r}{2}$$

$$5 = \frac{r}{2} \rightarrow r = 10 \text{ cm}$$

$$\ell_4 = r\sqrt{2}$$

$$\ell_4 = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

m) O lado de um quadrado inscrito numa circunferência mede  $6\sqrt{2}$  cm. Calcule a medida do apótema de um hexágono regular inscrito nessa circunferência.

$$\ell_4 = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\ell_4 = r\sqrt{2}$$

$$6\sqrt{2} = r\sqrt{2}$$

$$r = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow r = 6 \text{ cm}$$

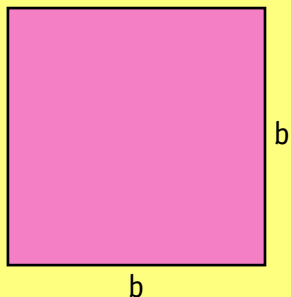
$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$a_6 = \frac{6 \times \sqrt{3}}{2}$$

$$a_6 = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

### 3. Áreas das figuras geométricas planas

#### Quadrado



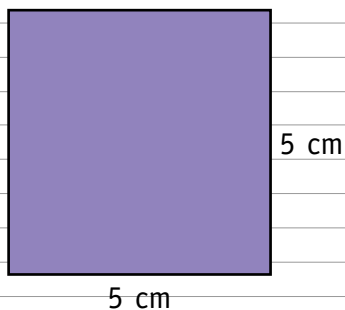
$b$  = medida do lado

Área = (medida do lado)<sup>2</sup>

ou

Área =  $b^2$

- 12.** Calcule a área de um quadrado cujo lado mede 5 cm.



$$b = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = b^2$$

$$\text{Área} = 5^2$$

$$\text{Área} = 25 \text{ cm}^2$$

- 13.** A área de um quadrado é de 36 cm<sup>2</sup>.

Calcule a medida do lado.

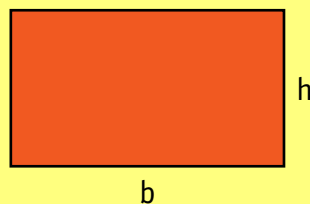
$$\text{Área} = 36 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área} = b^2$$

$$36 = b^2 \rightarrow b = \sqrt{36}$$

$$b = 6 \text{ cm}$$

#### Retângulo



$b$  = medida da base

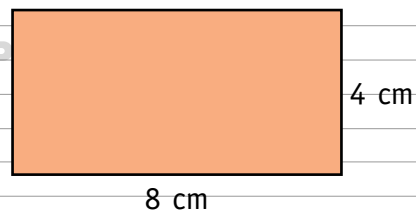
$h$  = medida da altura

Área = medida da base  $\times$  medida da altura

ou

Área =  $b \cdot h$

- 14.** Calcule a área de um retângulo cuja base mede 8 cm e a altura, 4 cm.



$$b = 8 \text{ cm} \quad h = 4 \text{ cm}$$

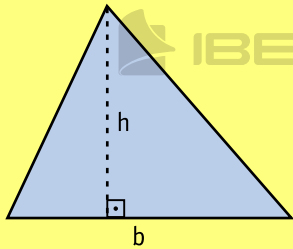
$$\text{Área} = b \cdot h$$

$$\text{Área} = 8 \cdot 4$$

$$\text{Área} = 32 \text{ cm}^2$$



## Triângulo



$b$  = medida da base

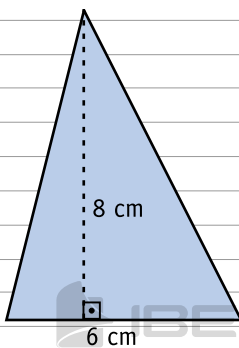
$h$  = medida da altura

$$\text{Área} = \frac{\text{medida da base} \times \text{medida da altura}}{2}$$

ou

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

- 15.** A base de um triângulo mede 6 cm e a altura 8 cm. Calcule a área desse triângulo.



$$b = 6 \text{ cm} \quad h = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{6 \cdot 8}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{48}{2}$$

$$\text{Área} = 24 \text{ cm}^2$$

- 16.** Determine a medida da base de um triângulo sabendo que a altura desse triângulo mede 5 cm e a área é igual a 25 cm<sup>2</sup>.

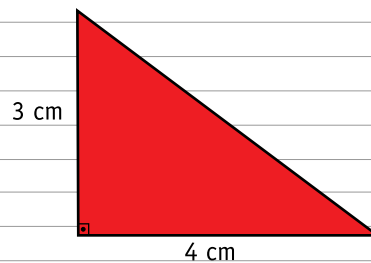
$$b = ? \quad h = 5 \text{ cm} \quad \text{Área} = 25 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$25 = \frac{b \cdot 5}{2}$$

$$50 = b \cdot 5 \rightarrow b = \frac{50}{5} \rightarrow b = 10 \text{ cm}$$

- 17.** Calcule a área de um triângulo retângulo cujos catetos medem 3 cm e 4 cm.



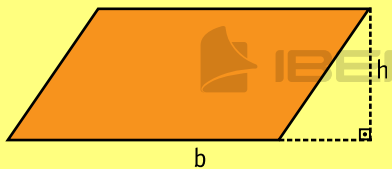
$$b = 4 \text{ cm} \quad h = 3 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 3}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{12}{2} \rightarrow \text{Área} = 6 \text{ cm}^2$$

## Paralelogramo



$b$  = medida da base

$h$  = medida da altura

Área = medida da base  $\times$  medida da altura

ou

$$\text{Área} = b \cdot h$$

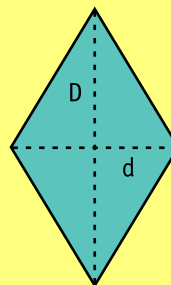
- 18.** Calcule a altura de um paralelogramo de área igual a  $35 \text{ cm}^2$  e cuja base mede  $7 \text{ cm}$ .

$$b = 7 \text{ cm} \quad h = ? \quad \text{Área} = 35 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área} = b \cdot h$$

$$35 = 7 \cdot h \rightarrow h = \frac{35}{7} \rightarrow h = 5 \text{ cm}$$

## Losango



$d$  = medida da diagonal menor

$D$  = medida da diagonal maior

$$\text{Área} = \frac{d \cdot D}{2}$$

- 19.** Qual é a área de um losango cujas diagonais medem  $4,2 \text{ cm}$  e  $5 \text{ cm}$ ?

$$d = 4,2 \text{ cm} \quad D = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{d \cdot D}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{4,2 \cdot 5}{2} \rightarrow \text{Área} = \frac{21}{2}$$

$$\text{Área} = 10,5 \text{ cm}^2$$

- 20.** A diagonal menor de um losango mede  $6 \text{ cm}$  e a área é igual a  $30 \text{ cm}^2$ . Calcule a medida da outra diagonal.

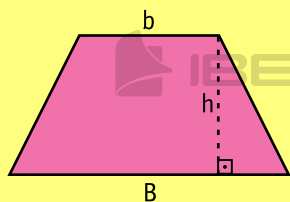
$$d = 6 \text{ cm} \quad D = ? \quad \text{Área} = 30 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área} = \frac{d \cdot D}{2} \rightarrow 30 = \frac{6 \cdot D}{2}$$

$$60 = 6 \cdot D \rightarrow D = \frac{60}{6}$$

$$D = 10 \text{ cm}$$

## Trapézio



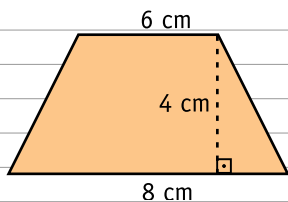
b = medida da base menor

B = medida da base maior

h = medida da altura

$$\text{Área} = \frac{(b + B) \cdot h}{2}$$

- 21.** Calcule a área de um trapézio cujas bases medem 6 cm e 8 cm e cuja altura mede 4 cm.



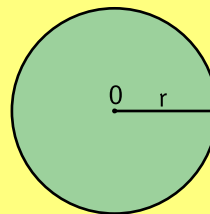
$$b = 6 \text{ cm} \quad B = 8 \text{ cm} \quad h = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{(b + B) \cdot h}{2} \longrightarrow \text{Área} = \frac{(6 + 8) \cdot 4}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{14 \cdot 4}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{56}{2} \longrightarrow \text{Área} = 28 \text{ cm}^2$$

## Círculo

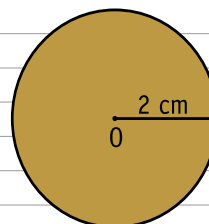


r = medida do raio

$\pi$  (pi)  $\cong 3,14$

$$\text{Área} = \pi r^2$$

- 22.** Calcule a área de um círculo cujo raio mede 2 cm.



$$\text{Área} = \pi r^2$$

$$\text{Área} = 3,14 \cdot 2^2$$

$$\text{Área} = 3,14 \cdot 4$$

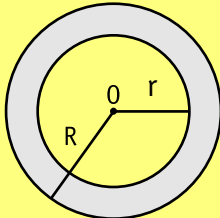
$$\text{Área} = 12,56 \text{ cm}^2$$

**Coroa circular**



Chamamos de coroa circular a região plana limitada por duas circunferências concêntricas, uma inscrita em outra.

**Área de uma coroa circular**



$r$  = medida do raio menor

$R$  = medida do raio maior

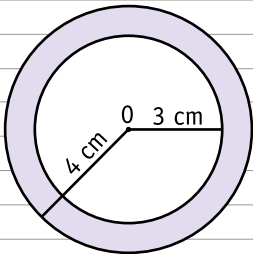
$$\text{Área} = \pi R^2 - \pi r^2$$

ou

$$\text{Área} = \pi(R^2 - r^2)$$

**23.** Calcule as áreas das coroas circulares.

a)



$$r = 3 \text{ cm}$$

$$R = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \pi(R^2 - r^2)$$

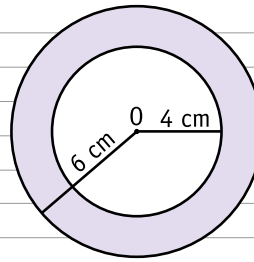
$$\text{Área} = 3,14 (4^2 - 3^2)$$

$$\text{Área} = 3,14 (16 - 9)$$

$$\text{Área} = 3,14 \cdot 7$$

$$\text{Área} = 21,98 \text{ cm}^2$$

b)



$$r = 4 \text{ cm}$$

$$R = 6 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$\text{Área} = 3,14 (6^2 - 4^2)$$

$$\text{Área} = 3,14 (36 - 16)$$

$$\text{Área} = 3,14 \cdot 20$$

$$\text{Área} = 62,80 \text{ cm}^2$$

**24.** Resolva os problemas.

a) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede 10 cm?

$$\ell = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \ell^2 \rightarrow \text{Área} = 10^2 \rightarrow \text{Área} = 100 \text{ cm}^2$$

b) O perímetro de um quadrado é igual a 24 cm. Calcule a área desse quadrado.

$$\ell + \ell + \ell + \ell = 24 \rightarrow 4 \cdot \ell = 24 \rightarrow \ell = \frac{24}{4}$$

$$\ell = 6 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \ell^2 \rightarrow \text{Área} = 6^2 \rightarrow \text{Área} = 36 \text{ cm}^2$$

c) Calcule a área de um retângulo de dimensões 5 cm e 12 cm.

$$b = 5 \text{ cm} \quad h = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = b \cdot h \longrightarrow \text{Área} = 5 \cdot 12$$

$$\text{Área} = 60 \text{ cm}^2$$

d) As diagonais de um losango medem 15 cm e 12 cm. Calcule a área desse losango.

$$d = 12 \text{ cm} \quad D = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{d \cdot D}{2} \longrightarrow \text{Área} = \frac{12 \cdot 15}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{180}{2} \longrightarrow \text{Área} = 90 \text{ cm}^2$$

e) Qual é a área de um trapézio cujas bases medem 4 dm e 7 dm e cuja altura mede 6 dm?

$$b = 4 \text{ dm} \quad B = 7 \text{ dm} \quad h = 6 \text{ dm}$$

$$\text{Área} = \frac{(b + B) \cdot h}{2} \longrightarrow \text{Área} = \frac{(4 + 7) \cdot 6}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{11 \cdot 6}{2} \longrightarrow \text{Área} = \frac{66}{2}$$

$$\text{Área} = 33 \text{ dm}^2$$

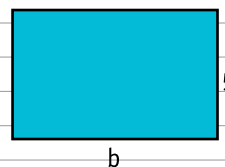
f) Calcule a área de um triângulo cuja base mede 18 cm e cuja altura é igual a um terço da medida da base.

$$b = 18 \text{ cm} \quad h = \frac{18}{3} = 6 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} \longrightarrow \text{Área} = \frac{18 \cdot 6}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{108}{2} \longrightarrow \text{Área} = 54 \text{ cm}^2$$

g) Calcule a área de um retângulo de perímetro igual a 26 cm e cuja altura mede 5 cm.



$$b + h + b + h = 26 \text{ cm}$$

$$b + 5 + b + 5 = 26 \longrightarrow 2b = 16 \longrightarrow b = 8 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = b \cdot h \longrightarrow \text{Área} = 8 \cdot 5 \longrightarrow \text{Área} = 40 \text{ cm}^2$$

h) Determine a área de um quadrado inscrito numa circunferência cujo raio mede 4 cm.

$$\ell_4 = r \sqrt{2} \quad r = 4 \text{ cm}$$

$$\ell_4 = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \ell^2 \longrightarrow \text{Área} = (4\sqrt{2})^2$$

$$\text{Área} = 16 \cdot 2 \longrightarrow \text{Área} = 32 \text{ cm}^2$$

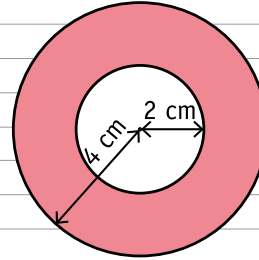
i) Determine a área de um círculo cujo raio mede 4 cm.

$$r = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \pi r^2 \rightarrow \text{Área} = 3,14 \cdot 4^2$$

$$\text{Área} = 3,14 \cdot 16 \rightarrow \text{Área} = 50,24 \text{ cm}^2$$

k) Determine a área da coroa circular.



$$R = 4 \text{ cm} \quad r = 2 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$\text{Área} = 3,14 (4^2 - 2^2)$$

$$\text{Área} = 3,14 (16 - 4)$$

$$\text{Área} = 3,14 \cdot 12$$

$$\text{Área} = 37,68 \text{ cm}^2$$

j) A área de um círculo é igual a 314 dm<sup>2</sup>.

Calcule a medida do raio desse círculo.

$$r = ? \quad \text{Área} = 314 \text{ dm}^2$$

$$\text{Área} = \pi r^2 \rightarrow 314 = 3,14 r^2$$

$$r^2 = \frac{314}{3,14} \rightarrow r^2 = 100$$

$$r = \sqrt{100} \rightarrow r = 10 \text{ dm}$$



**ESPAÇO RESERVADO PARA ANOTAÇÕES  
E EXERCÍCIOS DE REFORÇO**





EP

